详细解答

STEP II 2015，第 6 题

纯数学 • 利用对称性积分

STEP II 2015，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q6

关键思路

把 $\sin x$ 写成 $\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$，就能把 $1+\sin x$ 变成二倍角（double-angle）表达式，接着 $\sec^2$ 便可直接积分。代换（substitution）$y = \pi - x$ 把 $[0, \pi]$ 关于其中点作反射（reflection），而 $\sin x$ 对这个反射毫无反应。因此，$\mathrm{f}(\sin x)$ 前面的任何多项式（polynomial）因子，都可以换成它反射后的版本。在第 (iii) 部分，那个三次式（cubic）是特意挑选的，令这种交换一下子消去所有 x 的幂。

解答

第 (i) 部分

由于 $\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$ 及 $1 + \cos 2\theta = 2\cos^2\theta$，取 $\theta = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，得

$$1 + \sin x = 1 + \cos\left(\tfrac{1}{2}\pi - x\right) = 2\cos^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right).$$

取倒数再乘以 2，得 $\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = \dfrac{2}{1+\sin x}$，此即所求。（两边在相同的点上都没有定义，即 $\sin x = -1$ 之处。）

因此

$$\int \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \sec^2\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right)\mathrm{d}x = -\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) + C,$$

因为根据连锁法则（chain rule），对 $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 求导会产生一个因子 $-\frac{1}{2}$。

第 (ii) 部分

设 $I = \int_0^\pi x\,\mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$。令 $y = \pi - x$，于是 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$，上下限 $x = 0, \pi$ 变成 $y = \pi, 0$，而且 $\sin x = \sin(\pi - y) = \sin y$。于是

$$\begin{aligned} I &= \int_\pi^0 (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,(-\mathrm{d}y) = \int_0^\pi (\pi - y)\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y \\ &= \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^\pi y\,\mathrm{f}(\sin y)\,\mathrm{d}y = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x - I, \end{aligned}$$

因为 y 只是哑变量（dummy variable）。所以 $2I = \pi \int_0^\pi \mathrm{f}(\sin x)\,\mathrm{d}x$，即所求结果。

想一想 未知的积分 I 在等式两边都出现了。这是个问题吗?

不是，这正是我们想要的。代换本身并没有求出 I 的值，而是给出一条关于 I 的线性方程（linear equation），我们解这条方程便可。

现在取 $\mathrm{f}(t) = \dfrac{1}{1+t}$，它在 $t \in [0,1]$ 上连续（continuous），而这正是 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上的取值范围。由第 (i) 部分，

$$\int_0^\pi \frac{1}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \Big[-\tan\left(\tfrac{1}{4}\pi - \tfrac{1}{2}x\right) \Big]_0^\pi = -\tan\left(-\tfrac{1}{4}\pi\right) + \tan\tfrac{1}{4}\pi = 1 + 1 = 2,$$

而且 $\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，因为自变量一直留在 $[-\frac{1}{4}\pi, \frac{1}{4}\pi]$ 之内。因此

$$\int_0^\pi \frac{x}{1+\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2} \times 2 = \pi.$$

第 (iii) 部分

使用同样的反射。设 $g(x) = 2x^3 - 3\pi x^2$。展开，

$$\begin{aligned} g(\pi - x) &= 2(\pi^3 - 3\pi^2 x + 3\pi x^2 - x^3) - 3\pi(\pi^2 - 2\pi x + x^2) \\ &= -\pi^3 + 3\pi x^2 - 2x^3 = -\pi^3 - g(x). \end{aligned}$$

设 $J = \int_0^\pi \dfrac{g(x)}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x$。完全仿照第 (ii) 部分作代换 $y = \pi - x$，得

$$J = \int_0^\pi \frac{g(\pi - y)}{(1+\sin y)^2}\,\mathrm{d}y = -\pi^3 K - J, \qquad \text{其中} K = \int_0^\pi \frac{\mathrm{d}x}{(1+\sin x)^2}.$$

所以 $J = -\frac{1}{2}\pi^3 K$。

想一想 为甚么这个特定的三次式这么好用?

以 $u = x - \frac{1}{2}\pi$（即与中点的距离）表示，$g(x) = 2u^3 - \frac{3}{2}\pi^2 u - \frac{1}{2}\pi^3$。由于 $\sin x = \cos u$，函数 $1/(1+\sin x)^2$ 是 u 的偶函数（even function），所以奇次项 $2u^3$ 和 $-\frac{3}{2}\pi^2 u$ 在对称区间上的积分为零。剩下的只有常数 $-\frac{1}{2}\pi^3$，正是我们得到的结果。第 (ii) 部分其实是同一回事，只是取 $x = u + \frac{1}{2}\pi$。

要求 K，把第 (i) 部分的恒等式平方：$\dfrac{1}{(1+\sin x)^2} = \frac{1}{4}\sec^4\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$。代入 $u = \frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x$，于是 $\mathrm{d}x = -2\,\mathrm{d}u$，而 $x = 0, \pi$ 变成 $u = \frac{1}{4}\pi, -\frac{1}{4}\pi$。写成 $\sec^4 u = (1+\tan^2 u)\sec^2 u$，其积分为 $\tan u + \frac{1}{3}\tan^3 u$，于是

$$\begin{aligned} K &= \int_{\pi/4}^{-\pi/4} \tfrac{1}{4}\sec^4 u\,(-2\,\mathrm{d}u) = \frac{1}{2}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} (1+\tan^2 u)\sec^2 u\,\mathrm{d}u \\ &= \frac{1}{2}\Big[\tan u + \tfrac{1}{3}\tan^3 u\Big]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\tfrac{4}{3} + \tfrac{4}{3}\right) = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

因此

$$\int_0^{\pi} \frac{2x^3 - 3\pi x^2}{(1+\sin x)^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{\pi^3}{2}\cdot\frac{4}{3} = -\frac{2\pi^3}{3}.$$

验算

- 对 $-\tan\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right)$ 求导，得 $\frac{1}{2}\sec^2\left(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x\right) = 1/(1+\sin x)$。
- 正负号：第 (ii) 部分的被积函数为正，而 $\pi \approx 3.14$ 是合理的，因为由 $\frac{1}{2} \le 1/(1+\sin x) \le 1$ 可得上下界 $\frac{1}{4}\pi^2 \approx 2.47$ 及 $\frac{1}{2}\pi^2 \approx 4.93$。第 (iii) 部分中，$2x^3 - 3\pi x^2 = x^2(2x - 3\pi) < 0$ 在 $(0, \pi]$ 上成立，所以答案为负是对的。
- 数值积分（numerical quadrature）给出 $\int_0^{\pi}(1+\sin x)^{-2}\,\mathrm{d}x \approx 1.33333$，而第 (iii) 部分的积分 ≈ -20.6709，分别与 $\frac{4}{3}$ 及 $-\frac{2}{3}\pi^3$ 吻合。

常见错误

- 在第 (i) 部分漏掉连锁法则带来的因子 $-\frac{1}{2}$，结果得出 $+2\tan(\dots)$ 或 $-\frac{1}{2}\tan(\dots)$。
- 忘记对调上下限会抵消 $\mathrm{d}x = -\mathrm{d}y$ 带来的负号。
- 在第 (iii) 部分尝试连续三次分部积分（integration by parts）。这样做是可行的，但反射只需一行就能完成。

STEP 之外

第 (ii) 部分的技巧运用了对称性（symmetry）。如果一个权函数（weight function）在某个反射下保持不变，那么被积函数中只有关于反射中心为偶的部分才有贡献。你会在大

学一年级数学中处处遇到这个想法：在傅里叶级数（Fourier series）中，奇函数没有余弦项；在概率中，关于 μ 对称的分布（distribution），其平均值（mean）就在 μ。对于任何 $\sin x$ 与 $\cos x$ 的有理函数（rational function），代换 $t = \tan\frac{1}{2}x$ 是一个有系统的替代方法。想找更多这类积分，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。