详细解答

STEP II 2015，第 5 题

纯数学 · 反正切级数

STEP II 2015，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q5

关键思路

正切和角公式（tangent addition formula）能把若干个反正切（arctangent）之和化为单一分式，因此关于 $\tan S_n$ 的归纳法（induction）证明只需细心处理代数运算。微妙之处在于由 $\tan S_n$ 推出 S_n 本身这一步：知道一个角的正切值，只能确定该角至相差 π 的整数倍，所以我们必须确定 S_n 落在哪个区间。在第 (ii) 部分，角 α_n 原来正是第 (i) 部分中的那些反正切，而无穷级数（infinite sum）就是 S_n 的极限（limit）。

解答

第 (i) 部分

设 $\theta_m = \arctan(\frac{1}{2m^2})$，于是 $S_n = \theta_1 + \cdots + \theta_n$，且 $\tan\theta_m = \frac{1}{2m^2}$。

$\tan S_n$ 的公式。 当 $n = 1$ 时，$\tan S_1 = \frac{1}{2} = \frac{1}{1+1}$，所以结果成立。

假设对某个 $n \geq 1$ 有 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$。由于 $S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1}$，和角公式给出

$$\tan S_{n+1} = \frac{\tan S_n + \tan\theta_{n+1}}{1 - \tan S_n \tan\theta_{n+1}} = \frac{\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+1)^2}}{1 - \dfrac{n}{2(n+1)^3}}.$$

分母不为零，因为乘积 $\frac{n}{n+1} \cdot \frac{1}{2(n+1)^2}$ 小于 1。将分子和分母同乘以 $2(n+1)^3$，得

$$\tan S_{n+1} = \frac{(n+1)(2n(n+1)+1)}{2(n+1)^3 - n} = \frac{(n+1)(2n^2+2n+1)}{2n^3+6n^2+5n+2}.$$

想一想 我们怎样知道分母能够漂亮地因式分解?

我们的目标是 $\frac{n+1}{n+2}$，所以分母理应是 $(n+2)(2n^2+2n+1)$。展开即可证实：$(n+2)(2n^2+2n+1) = 2n^3+6n^2+5n+2$。约去正因式 $2n^2+2n+1$，得

$$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2},$$

这正是 $n+1$ 时的结果。由归纳法，对所有 $n \geq 1$，$\tan S_n = \frac{n}{n+1}$。

S_n 的公式。 单凭 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$，我们只能说对某个整数 k，$S_n = \arctan\frac{n}{n+1} + k\pi$。为了证明 $k=0$，我们再次用归纳法证明

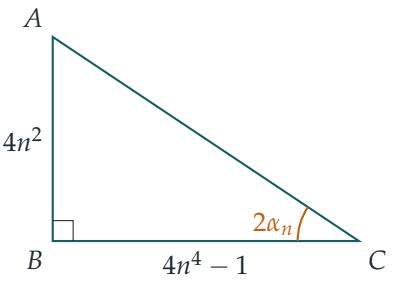
$$S_n = \arctan\frac{n}{n+1}.$$

当 $n=1$ 时，$S_1 = \arctan\frac{1}{2}$，符合要求。假设结果对某个 n 成立。由于 $0 < \frac{n}{n+1} < 1$，我们有 $0 < S_n < \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$。又 $0 < \frac{1}{2(n+1)^2} < 1$，所以 $0 < \theta_{n+1} < \frac{1}{4}\pi$。相加得

$$0 < S_{n+1} = S_n + \theta_{n+1} < \tfrac{1}{2}\pi.$$

因此 S_{n+1} 位于 $[0, \frac{1}{2}\pi)$，这恰好是 arctan 在非负数上的值域；而由第一个结果，$\tan S_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$。由于 tan 在此区间上是一一对应的（one-to-one），故 $S_{n+1} = \arctan\frac{n+1}{n+2}$。归纳法至此完成。

第 (ii) 部分



由于 B 处的角是直角，角 C 的对边是 AB，邻边是 BC（注意当 $n \geq 1$ 时 $4n^4-1 > 0$）。所以

$$\tan 2\alpha_n = \frac{AB}{BC} = \frac{4n^2}{4n^4-1}.$$

第 (i) 部分提示我们试试 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$。设 $t = \frac{1}{2n^2}$，倍角公式（double-angle formula）给出

$$\frac{2t}{1-t^2} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1-\frac{1}{4n^4}} = \frac{4n^2}{4n^4-1},$$

两者吻合。为了确保这是正确的那个值，而不仅仅是其中一个可能的值，设 $t = \tan\alpha_n$。方程 $\frac{2t}{1-t^2} = \frac{4n^2}{4n^4-1}$ 可整理为二次方程（quadratic equation）

$$4n^2t^2 + 2(4n^4 - 1)t - 4n^2 = 0,$$

其两根之积为 -1。其中一根是 $\frac{1}{2n^2}$，所以另一根是 $-2n^2 < 0$。但 $2\alpha_n$ 是直角三角形中直角以外的一个角，所以 $0 < 2\alpha_n < \frac{1}{2}\pi$，从而 $0 < \alpha_n < \frac{1}{4}\pi$，且 $t > 0$。因此 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$；又由于 α_n 位于 arctan 的值域内，

$$\alpha_n = \arctan\frac{1}{2n^2}.$$

想一想 这里的无穷级数是甚么意思？第 (i) 部分又怎样帮上忙？

无穷级数就是其部分和（partial sums）的极限，而由第 (i) 部分，这些部分和是

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n = S_N = \arctan\frac{N}{N+1}.$$

当 $N \to \infty$ 时，$\frac{N}{N+1} \to 1$；又由于 arctan 是连续（continuous）函数，$\arctan\frac{N}{N+1} \to \arctan 1 = \frac{1}{4}\pi$。因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = \tfrac{1}{4}\pi,$$

符合要求。

验算

- 当 $n = 1$ 时，第 (ii) 部分的三角形就是我们熟悉的 3–4–5 三角形，其中 $\tan 2\alpha_1 = \frac{4}{3}$。而 $\tan\alpha_1 = \frac{1}{2}$ 满足 $\frac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$。
- $S_2 = \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{8}$，而 $\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$，与公式的预测一致。
- 从数值上看，把首 2000 项相加得 $S_{2000} \approx 0.785148$，而 $\frac{1}{4}\pi \approx 0.785398$。两者相差约 $\frac{1}{4000}$，这正合预期：由差角公式，恰有 $\frac{1}{4}\pi - \arctan\frac{N}{N+1} = \arctan\frac{1}{2N+1}$。

常见错误

- 由 $\tan S_n = \frac{n}{n+1}$ 直接得出 $S_n = \arctan\frac{n}{n+1}$，而没有证明 S_n 位于 $[0, \frac{1}{2}\pi)$。
- 凭侥幸猜中 $\tan\alpha_n = \frac{1}{2n^2}$，却没有排除二次方程的另一个根。
- 把无穷级数当作 S_∞，却没有说明它是 S_N 的极限。

STEP 之外

这其实是一个经过伪装的伸缩级数（telescoping series）：由于 $\frac{1}{2m^2} = \frac{(2m+1)-(2m-1)}{1+(2m+1)(2m-1)}$，每一项都等于 $\arctan(2m+1) - \arctan(2m-1)$，于是总和坍缩为 $\arctan(2n+1) - \frac{1}{4}\pi$，而这等于 $\arctan \frac{n}{n+1}$。把无穷级数定义为部分和的极限，并懂得何时可以让极限穿过连续函数，正是大学第一门数学分析（analysis）课程的起点。想进一步阅读，Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是个好起点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。