详细解答

STEP II 2015，第 4 题

纯数学 · 反正切函数的分支

> **STEP II 2015，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s2-q4

关键思路

知道 $\tan\theta$ 的值，只能把 θ 确定至相差 π 的整数倍，因此每条方程都有无穷多个解的分支（branch），彼此之间只是沿铅直方向平移 π 的倍数。连续性（continuity）和 $x=0$ 处的值决定选取哪一个分支；而每当右方趋向 $\pm\infty$ 时，连续性亦迫使我们转换分支：那正是角度经过 $\frac{1}{2}\pi$ 的奇数倍的时刻。所以在每一部分，我们先描绘右方的图像，然后连续地追踪角度的变化。

全文中 arctan 指主值（principal value），即 $-\frac{1}{2}\pi < \arctan u < \frac{1}{2}\pi$。

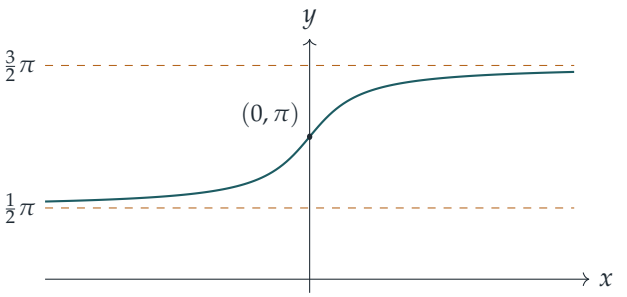
解答

第 (i) 部分

$\tan\theta = x$ 的每一个解都是 $\theta = \arctan x + n\pi$，其中 n 为整数。函数 $\arctan x$ 在整条实数线上连续，所以 $\mathrm{f}(x) - \arctan x$ 是一个只取 $\{n\pi\}$ 中的值的连续函数；连续函数不能在这些孤立的值之间跳跃，因此它是常数。由于 $\mathrm{f}(0) = \pi$ 而 $\arctan 0 = 0$，该常数为 π：

$$\mathrm{f}(x) = \pi + \arctan x.$$

所以这条曲线就是一般的 arctan 曲线向上平移 π：它严格递增，以斜率 1 通过 $(0,\pi)$（因为 $\mathrm{f}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$），并有水平渐近线（asymptote）：当 $x \to -\infty$ 时为 $y = \frac{1}{2}\pi$，当 $x \to \infty$ 时为 $y = \frac{3}{2}\pi$。由于 $\mathrm{f}(-x) = 2\pi - \mathrm{f}(x)$，它关于 $(0,\pi)$ 具有 2 阶旋转对称（rotational symmetry）。



第 (ii) 部分

曲线 $y = \dfrac{x}{1+x^2}$。记之为 $q(x)$。它是奇函数（odd function），只在 $x = 0$ 处为零，且与 x 同号。当 $x \to \pm\infty$ 时，$q(x) \approx 1/x \to 0$，所以 x 轴是一条渐近线，在右方从上方趋近，在左方从下方趋近。求导，得

$$q'(x) = \frac{(1+x^2) - 2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2},$$

所以驻点（stationary point）位于 $x = \pm 1$：极大点 $(1, \frac{1}{2})$ 和极小点 $(-1, -\frac{1}{2})$。（等价地，由算术—几何平均不等式（AM–GM）得 $1 + x^2 \geq 2|x|$，故 $|q(x)| \leq \frac{1}{2}$。）在原点处的斜率为 1。

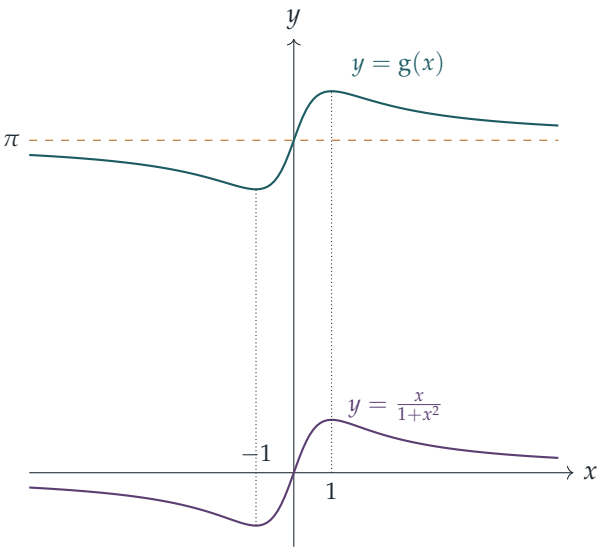
曲线 $y = \mathrm{g}(x)$。现在右方 $q(x)$ 连续且有界，所以与第 (i) 部分完全相同的论证给出

$$\mathrm{g}(x) = \pi + \arctan \frac{x}{1+x^2}.$$

由于 arctan 是递增的，g 的升降位置与 q 完全相同。因此

- 当 $x \to \pm\infty$ 时 $\mathrm{g}(x) \to \pi$（在右方从上方趋近，在左方从下方趋近）；
- g 在 $x = 1$ 处有极大值 $\pi + \arctan \frac{1}{2} \approx 3.61$，在 $x = -1$ 处有极小值 $\pi - \arctan \frac{1}{2} \approx 2.68$；
- 它以斜率 $\dfrac{q'(0)}{1+q(0)^2} = 1$ 通过 $(0, \pi)$。

它的形状就是 q 的形状稍为压扁（因为当 $u > 0$ 时 $\arctan u < u$），再向上平移 π；它从不接近 $\frac{1}{2}\pi$ 或 $\frac{3}{2}\pi$，所以从不需要转换分支。



第 (iii) 部分

曲线 $y = \dfrac{x}{1-x^2}$。记之为 $r(x)$。它是奇函数，只在 $x = 0$ 处为零，并在 $x = \pm 1$ 处有铅直渐近线。当 $x \to \pm\infty$ 时，$r(x) \approx -1/x \to 0$。它的导数是

$$r'(x) = \frac{(1-x^2)+2x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{1+x^2}{(1-x^2)^2} > 0,$$

所以 r 在其有定义的三个区间上各自严格递增。由 x 和 $1-x^2$ 的正负号可读出：

- 在 $x < -1$ 上，r 由 0^+（当 $x \to -\infty$）上升至 $+\infty$（当 $x \to -1^-$）；
- 在 $-1 < x < 1$ 上，r 由 $-\infty$ 上升至 $+\infty$，并以斜率 1 通过原点；
- 在 $x > 1$ 上，r 由 $-\infty$（当 $x \to 1^+$）上升至 0^-（当 $x \to \infty$）。

曲线 $y = \mathrm{h}(x)$。在每个区间上分别而言，r 是连续的，所以 $\mathrm{h}(x) - \arctan r(x)$ 在该区间上是 π 的某个固定倍数，但在不同区间上这个倍数可以不同。我们逐个区间求出它。

在 $-1 < x < 1$ 上，条件 $\mathrm{h}(0) = \pi$ 给出 $\mathrm{h}(x) = \pi + \arctan r(x)$。当 $x \to 1^-$ 时 $r \to +\infty$，所以 $\mathrm{h}(x) \to \pi + \frac{1}{2}\pi = \frac{3}{2}\pi$；当 $x \to -1^+$ 时 $r \to -\infty$，而 $\mathrm{h}(x) \to \frac{1}{2}\pi$。在 $x = \pm 1$ 处的连续性迫使 $\mathrm{h}(1) = \frac{3}{2}\pi$ 及 $\mathrm{h}(-1) = \frac{1}{2}\pi$。

> **想一想** 在 $x = 1$ 的右边紧贴处，$r(x)$ 是很大的负数，所以 $\arctan r(x)$ 接近 $-\frac{1}{2}\pi$。我们要加上 π 的哪一个倍数，才能使 h 在 $x = 1$ 处连续?

当 $x > 1$ 时有 $\mathrm{h}(x) = n\pi + \arctan r(x)$，而当 $x \to 1^+$ 时它趋向 $n\pi - \frac{1}{2}\pi$。要使它等于 $\frac{3}{2}\pi$，须有 $n = 2$。同理，当 $x < -1$ 时有 $\mathrm{h}(x) = m\pi + \arctan r(x) \to m\pi + \frac{1}{2}\pi$（当

$x \to -1^-$），要与 $\frac{1}{2}\pi$ 吻合须有 $m = 0$。因此

$$\mathrm{h}(x) = \begin{cases} \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x < -1, \\ \pi + \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & -1 < x < 1, \\ 2\pi + \arctan\dfrac{x}{1-x^2}, & x > 1, \end{cases} \qquad \mathrm{h}(\pm 1) = \pi \pm \tfrac{1}{2}\pi.$$

所以当 r 急升至 $+\infty$ 再从 $-\infty$ 重新出现时，角度 h 只是继续递增，越过 $\frac{3}{2}\pi$（在 $x = -1$ 处同样越过 $\frac{1}{2}\pi$）。

现在看草图的各项特征。

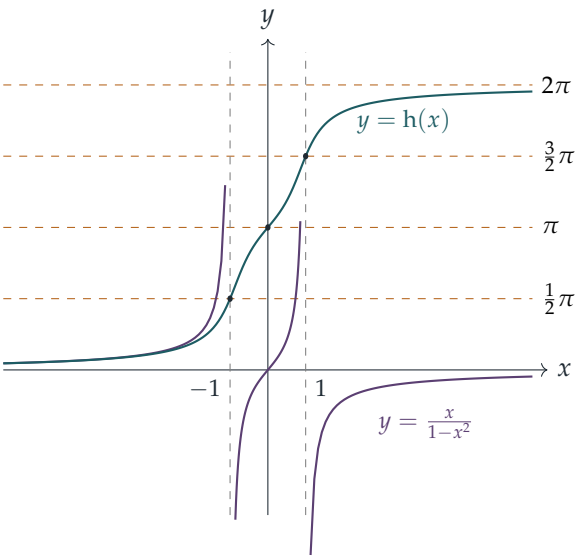
- 渐近线。当 $x \to -\infty$ 时，$r \to 0^+$，所以 $\mathrm{h}(x) \to 0$，从上方趋近；当 $x \to \infty$ 时，$r \to 0^-$，所以 $\mathrm{h}(x) \to 2\pi$，从下方趋近。
- 单调（*monotonic*）。在 ± 1 以外，由链式法则（chain rule），

$$\mathrm{h}'(x) = \frac{r'(x)}{1 + r(x)^2} = \frac{1 + x^2}{(1-x^2)^2 + x^2} = \frac{1 + x^2}{x^4 - x^2 + 1} > 0.$$

  （分母等于 $(x^2 - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$。）这个表达式在 $x = \pm 1$ 处完全没有问题，其值为 2，所以 h 在该处是光滑的：曲线以斜率 2 通过 $(1, \frac{3}{2}\pi)$ 和 $(-1, \frac{1}{2}\pi)$，并没有尖角。
- 关键点。$(0, \pi)$，斜率 1；$(\pm 1, \pi \pm \frac{1}{2}\pi)$，斜率 2。
- 对称性。$\mathrm{h}(-x) = 2\pi - \mathrm{h}(x)$，所以曲线关于 $(0, \pi)$ 具有旋转对称。

所以 h 由 0 稳定地递增至 2π，是一条与第 (i) 部分相似的 S 形曲线，但覆盖的高度是其两倍。在草图中，r 的渐近线 $x = \pm 1$ 恰好对准 h 越过 $\frac{1}{2}\pi$ 和 $\frac{3}{2}\pi$ 的点。

有一个简洁的方法可把三种情况一并写出：$\mathrm{h}(x) - \pi$ 是点 $(1 - x^2, x)$ 在 $(-\pi, \pi)$ 内的极角（polar angle）。该点从不到达原点或负水平轴（当 $1 - x^2 \le 0$ 时有 $x \ne 0$），这正是角度连续变化的原因。



验算

- 每条公式都满足定义方程：例如 $\tan(2\pi+\theta)=\tan\theta$，而且在 0 处的值全都是 π。
- 代入个别数值：$g(1)=\pi+\arctan\frac{1}{2}\approx 3.605$，以及 $h(2)=2\pi+\arctan(-\frac{2}{3})\approx 5.695$，正如草图所要求，它介乎 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ 与 $2\pi\approx 6.283$ 之间。
- h 的连续性：$h(0.999)\approx 4.710$ 及 $h(1.001)\approx 4.714$，分处 $\frac{3}{2}\pi\approx 4.712$ 两侧，与 $x=1$ 处斜率为 2 一致。以电脑在 $[-10,10]$ 上逐步检查，确认 f、g、h 都没有任何跳跃。

常见错误

- 对所有 x 都写 $h(x)=\pi+\arctan\frac{x}{1-x^2}$：这在 $x=1$ 处向下跳 π，在 $x=-1$ 处向上跳 π，所以并不连续。
- 只因 $\frac{x}{1-x^2}$ 在 $x=\pm1$ 处有铅直渐近线，便在 $y=h(x)$ 的图像中也画上；角度本身保持有限，只是它的正切值趋向无穷。
- 在 $y=h(x)$ 的 $x=\pm1$ 处画出尖角；该处左右两侧的斜率都是 2。

STEP 之外

我们所做的，是为一个多值反函数（many-valued inverse function）选取一个连续的分支；而“每当正切值经过无穷大便加上 π”这条规则，让我们初尝把路径提升（lifting）到覆

叠空间（covering space）的滋味。同一想法应用于复对数（complex logarithm）和 $\arg z$，正是复分析（complex analysis）中环绕数（winding number）和辐角原理（argument principle）的基础。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）以几何方式发展这套理论，读来趣味盎然。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。