详细解答

STEP II 2015，第 3 题

纯数学 · 计数与数学归纳法

STEP II 2015，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q3

关键思路

按最长的棒把三角形分类。被 T_n 计入但不被 T_{n-1} 计入的三角形，正好是那些用上长度为 n 的棒的三角形，所以 $T_n - T_{n-1}$ 就是满足 $a < b < n$ 及 $a + b \geq n$ 的数对个数。对中间那枝棒 b 的每个选择，这都是一个简单的计数，而这些计数构成一个等差数列（arithmetic progression）。把两个相邻的差相加便得到 $T_{2m} - T_{2m-2}$，这正是归纳步骤（inductive step）所需要的。

解答

计算最长棒为 c 的三角形

被 T_n 计入的三角形，其棒长为 $a < b < c \leq n$。当中 $c \leq n-1$ 的，恰好就是被 T_{n-1} 计入的三角形，所以

$$T_n - T_{n-1} = \#\{(a,b) : 1 \leq a < b < n,\ a + b \geq n\}.$$

固定中间的棒 b。我们需要 $n - b \leq a \leq b - 1$（由于 $b < n$，$a \geq 1$ 自动成立），所以当 $2b - n > 0$ 时有 $2b - n$ 个选择，否则没有。因此 b 由大于 $\frac{n}{2}$ 的最小整数取到 $n - 1$。

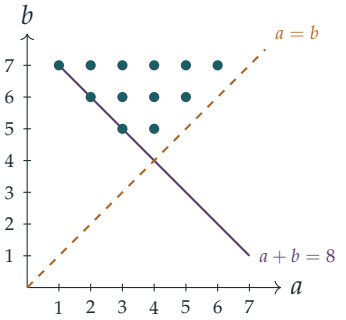
$n = 8$ 的情况

当 $c = 8$ 时，中间的棒可以是 $b = 5, 6, 7$，分别给出 a 的 2、4 及 6 个选择：

$$b = 5 :\ a \in \{3,4\}, \qquad b = 6 :\ a \in \{2,3,4,5\}, \qquad b = 7 :\ a \in \{1,\ldots,6\}.$$

（$b = 4$ 需要 $4 \leq a \leq 3$，这是不可能的。）因此 $T_8 - T_7 = 2 + 4 + 6 = 12$，正如所求。

下图显示这 12 个数对 (a,b)：它们是位于直线 $a+b=8$ 之上或其上方，并严格位于对角线 $a=b$ 上方的点。



至于 T_7-T_6，最长的棒是 7，中间的棒 $b=4,5,6$ 分别给出 $2b-7=1,3,5$ 个选择，所以 $T_7-T_6=1+3+5=9$。因此

$$T_8-T_6=(T_8-T_7)+(T_7-T_6)=12+9=21.$$

一般的差

当 $n=2m$ 时，中间的棒取遍 $b=m+1,\dots,2m-1$，对应有 $2b-2m=2,4,\dots,2(m-1)$ 个选择：

$$T_{2m}-T_{2m-1}=2+4+\cdots+2(m-1)=m(m-1).$$

当 $n=2m-1$ 时，中间的棒取遍 $b=m,\dots,2m-2$，对应有 $2b-(2m-1)=1,3,\dots,2m-3$ 个选择，而首 $m-1$ 个奇数之和是 $(m-1)^2$。相加得

$$T_{2m}-T_{2m-2}=m(m-1)+(m-1)^2=(m-1)(2m-1).$$

（取 $m=4$，这两条式分别给出 12 和 21，与上面的数值吻合。）只要较小的下标至少是 3，这些式子便成立，即第二条公式要求 $m\geq 3$。

归纳法

设 $f(m)=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$。我们用归纳法（induction）证明对所有 $m\geq 2$，$T_{2m}=f(m)$。

基本情况（*base case*），$m=2$。从棒 $1,2,3,4$ 中选三枝，共有四种选法：$(1,2,3)$、$(1,2,4)$、$(1,3,4)$、$(2,3,4)$，除 $(1,2,4)$ 外全部满足 $a+b\geq c$。所以 $T_4=3$，而 $f(2)=\frac{1}{6}\cdot 2\cdot 1\cdot 9=3$。

归纳步骤。假设对某个 $k\geq 3$，$T_{2k-2}=f(k-1)$。由差的公式，

$$T_{2k}=f(k-1)+(k-1)(2k-1),$$

所以只需证明 $f(k)-f(k-1)=(k-1)(2k-1)$。

想一想 怎样才能整理 $f(k)-f(k-1)$，而不用把两个三次式完全展开?

两项都含有因子 $k-1$，所以先把它抽出来:

$$\begin{aligned} f(k)-f(k-1) &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[k(4k+1)-(k-2)(4k-3)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)\big[(4k^2+k)-(4k^2-11k+6)\big] \\ &= \tfrac{1}{6}(k-1)(12k-6) = (k-1)(2k-1). \end{aligned}$$

因此 $T_{2k}=f(k)$。由归纳法，对每个 $m\geq 2$，$T_{2m}=\frac{1}{6}m(m-1)(4m+1)$。

奇数枝棒

利用 $T_{2m-1}=T_{2m}-m(m-1)$,

$$T_{2m-1}=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m+1)-m(m-1)=\tfrac{1}{6}m(m-1)(4m-5) \qquad (m\geq 2).$$

若改把棒的数目写成 $2m+1$（以 $m+1$ 代替 m），则得

$$T_{2m+1}=\tfrac{1}{6}m(m+1)(4m-1) \qquad (m\geq 1).$$

例如 $T_3=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$，即唯一的三角形 $(1,2,3)$。

验算

- 由公式得 $T_6=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 2\cdot 13=13$、$T_7=\frac{1}{6}\cdot 3\cdot 4\cdot 11=22$ 及 $T_8=\frac{1}{6}\cdot 4\cdot 3\cdot 17=34$，所以 $T_8-T_7=12$ 及 $T_8-T_6=21$，与直接计算的结果相同。
- 用电脑逐一数算 $\{1,\ldots,n\}$ 中所有三元组，对 3 至 79 的每个 n，结果都与两条闭合形式（closed form）吻合。
- 设 $n=2m$，偶数情况的公式约为 $\frac{2}{3}m^3=\frac{n^3}{12}$，奇数情况的公式亦有相同表现。这是全部 $\binom{n}{3}\approx\frac{n^3}{6}$ 个可能三元组的一半，所以当 n 很大时，大约一半的三枝棒选法能组成三角形。

常见错误

- 忘记各枝棒长度互不相同，所以 $a<b$ 是严格的：容许 $a=b$ 会多算。
- 漏掉面积为零的（退化，degenerate）三角形：条件是 $a+b\geq c$，所以 $(1,2,3)$ 也要计算在内。
- 从 $m=1$ 开始归纳：T_2 没有定义，因为我们需要 $n\geq 3$。

STEP 之外

像上图那样计算一个区域内的格点（lattice points），是分拆（partitions）理论和生成函数（generating functions）的起点：T_n 有一个有理生成函数，而 n 分为偶数和奇数两种情况，反映了其分母中的因子 $1 - x^2$。像这样的结果，即计数是 n 的多项式、但该多项式取决于 n 的余数（residue），称为拟多项式（quasi-polynomial）。如欲进一步了解递推关系（recurrence）和计数论证，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学进阶难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。