详细解答

STEP II 2015，第 2 题

纯数学 · 三角形几何

STEP II 2015，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

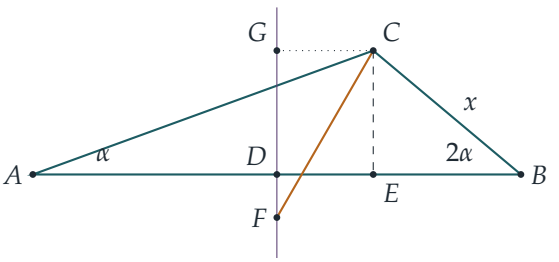
step.maths.org/questions/15-s2-q2

关键思路

第一个结果只需用正弦定理 (sine rule) 配合 $\sin 3\alpha$ 的三倍角公式 (triple-angle formula)。至于 DE，就把所有长度都沿 AB 从其中一端量起：CE 两侧的直角三角形 (right-angled triangle)直接给出 AE 和 BE。DE 的答案出奇地简单,而正是这份简单令三等分(trisection)得以成立：它告诉我们 C 与垂直平分线 (perpendicular bisector) 相距多远，再与 $CF = x$ 比较，便能确定一个角。

解答

全文中，C 处的角为 $\angle ACB = \pi - 3\alpha$，又因 2α 是锐角（acute angle），故 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$。



长度 AB

由正弦定理，并利用 $\sin(\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha$，得

$$\frac{AB}{\sin 3\alpha} = \frac{x}{\sin \alpha}.$$

再用三倍角公式 $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$，并除以 $\sin\alpha \neq 0$，得

$$AB = x\,\frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{\sin\alpha} = (3 - 4\sin^2\alpha)\,x,$$

此即所求。

长度 DE

A 和 B 处的角都是锐角，所以由 C 所作垂线的垂足（foot of the perpendicular）E 位于 A 与 B 之间。在直角三角形 CEB 中，

$$BE = x\cos 2\alpha, \qquad CE = x\sin 2\alpha.$$

因此

$$AE = AB - BE = x(3 - 4\sin^2\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha)) = x(2 - 2\sin^2\alpha) = 2x\cos^2\alpha,$$
$$AD = \tfrac{1}{2}AB = x(\tfrac{3}{2} - 2\sin^2\alpha).$$

两式相减，

$$AE - AD = x(2 - 2\sin^2\alpha - \tfrac{3}{2} + 2\sin^2\alpha) = \tfrac{1}{2}x.$$

此值为正，所以 E 位于 D 与 B 之间，且

$$DE = \tfrac{1}{2}x,$$

与 α 无关。

三等分

设 G 为由 C 向 AB 的垂直平分线 DF 所作垂线的垂足。由于 CE 和 GD 都垂直于 AB，$CGDE$ 是一个矩形（rectangle），所以 $CG = DE = \frac{1}{2}x$，而且 CG 平行于 AB，即垂直于 CE。

> ? **想一想** 怎样把 $CF = x$ 转化为一个角?

三角形 CGF 在 G 处为直角，斜边（hypotenuse）$CF = x$，一边 $CG = \frac{1}{2}x$。所以

$$\cos\angle GCF = \frac{CG}{CF} = \frac{1}{2}, \qquad \text{所以} \qquad \angle GCF = \frac{\pi}{3}.$$

垂直平分线上与 C 相距 x 的点有两个，分别在 G 的两侧。从射线 CE（向下指向 AB）起，朝 A 的方向量度，射线 CG 所成的角为 $\frac{\pi}{2}$，所以两条候选射线 CF 所成的角分别为 $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$（$G$ 下方的点）和 $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6}$（$G$ 上方的点）。

现在判断哪一点与 B 位于 AC 的同一侧。在直角三角形 ACE 中，$\angle ACE = \frac{\pi}{2} - \alpha$，所以射线 CA 在同一侧与 CE 所成的角为 $\frac{\pi}{2} - \alpha$。由 C 出发、位于直线 AC 上 B 那一侧的射

线，就是按这种量法角度小于 $\frac{\pi}{2}-\alpha$ 的射线（或位于 CE 另一侧、朝向 B 的射线）。由于 $\alpha<\frac{\pi}{4}$，

$$\frac{\pi}{6}<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}-\alpha<\frac{5\pi}{6},$$

所以 G 下方的点在 B 那一侧，而 G 上方的点则不在。因此 F 是下方的点，$\angle ECF=\frac{\pi}{6}$，而射线 CF 位于角 ACE 之内，因而也在 $\angle ACB$ 之内。所以

$$\angle ACF=\angle ACE-\angle ECF=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{3}-\alpha=\frac{1}{3}(\pi-3\alpha)=\frac{1}{3}\angle ACB.$$

故此 CF 在靠近 CA 的一边截出 $\angle ACB$ 的三分之一（而 $\angle FCB=\frac{2}{3}\angle ACB$）：直线 FC 三等分角 ACB。

验算

- 取 $\alpha=\frac{\pi}{6}$，三角形的三个角为 30°、60°、90°，而 $AB=(3-1)x=2x$，正是熟悉的斜边长度。于是 $AE=2x\cos^2 30^\circ=\frac{3}{2}x$，$AD=x$，所以 $DE=\frac{1}{2}x$。C 处的角为 90°，而 $\angle ACF=60^\circ-30^\circ=30^\circ$，正好是它的三分之一。
- 取 $\alpha=20^\circ$ 及 $x=1$，得 $AB\approx 2.532$ 及 $\angle ACB=120^\circ$；直接用坐标构作 F，得 $\angle ACF=40^\circ$。三个结果亦已用电脑对数以千计的随机三角形逐一验证。

常见错误

- 把 F 取在 G 上方。那一点与 C 的距离同样是 x，但它位于 AC 的另一侧，这正是题目要指明哪一侧的原因。
- 在把 DE 写成两段长度之差以前，忘记检查 E 是否位于 A 与 B 之间（以及位于 D 的哪一侧）。

STEP 之外

用尺规（ruler and compasses）三等分一般的角是不可能的，这个事实可用域论（field theory）证明：三等分 60° 需要构作一个不可约三次多项式（irreducible cubic）的根，而可构作（constructible）的长度只会满足一层层的二次方程。在本题中，三角形提供了额外信息（B 处的角是 A 处的两倍），正是这一点让一个简单的构作也能完成任务。想看更多优美的三角形几何，可参阅考克斯特（Coxeter）与 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《几何再探》）；至于不可能性的证明，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。