详细解答

STEP II 2015，第 13 题

概率与统计 · 指数分布的矩

STEP II 2015，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q13

关键思路

成本由固定金额 ky 加上一个随机金额组成，而除非洪水高于预备的高度，否则这个随机金额为零。因此一切都归结为 $W = \max(X - y, 0)$ 的矩（moments），即洪水超出预备高度的部分。指数分布（exponential distribution）具有无记忆性（memoryless）：在 $X > y$ 的条件下，超出量 $X - y$ 仍然服从参数相同的指数分布。这使期望值（expectation）和方差（variance）都变成只需一行的计算。

解答

记 $p = \mathrm{P}(X > y) = \int_y^\infty \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}$，并设

$$W = \begin{cases} X - y & \text{若} X > y, \\ 0 & \text{若} X \le y, \end{cases} \qquad \text{使得} \qquad C = ky + aW.$$

这里 $y \ge 0$ 是预先选定的常数，所以 ky 并非随机量。

第 (i) 部分

由于当 $X \le y$ 时 $W = 0$，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(W) &= \int_y^\infty (x - y)\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda(u+y)}\,\mathrm{d}u \qquad (u = x - y) \\ &= \mathrm{e}^{-\lambda y} \int_0^\infty u\,\lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y} \cdot \frac{1}{\lambda}, \end{aligned}$$

这里用到参数为 λ 的指数分布的平均值是 $\frac{1}{\lambda}$ 这个事实（或者用分部积分法（integration by parts）计算）。因此

$$\mathrm{E}(C) = ky + a\,\mathrm{E}(W) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y},$$

即为所求。

求最小值。对 $y \geq 0$，设 $g(y) = ky + \frac{a}{\lambda}\mathrm{e}^{-\lambda y}$。则

$$g'(y) = k - a\mathrm{e}^{-\lambda y}, \qquad g''(y) = a\lambda\mathrm{e}^{-\lambda y} > 0,$$

所以 g' 严格递增，由 $g'(0) = k - a$ 开始，当 $y \to \infty$ 时趋向 k。

> ? **想一想** 为甚么不能直接令 $g'(y) = 0$ 就了事?

因为 y 限制在 $y \geq 0$，而驻点（stationary point）$\mathrm{e}^{-\lambda y} = k/a$ 只有在 $k/a \leq 1$ 时才落在这个范围内。所以我们按 a/k 的值分情况讨论。

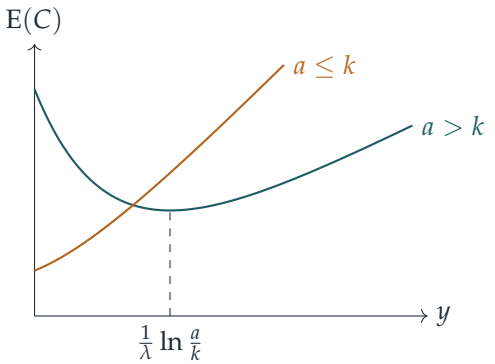
- $a/k > 1$。此时 $g'(0) = k - a < 0$，而 $g'(y) = 0$ 于

  $$y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k} > 0.$$

  由于 g' 递增，g 在此点之前递减、之后递增，所以这是 $y \geq 0$ 上的全域最小值。最小期望成本为 $\frac{k}{\lambda}\left(1 + \ln\frac{a}{k}\right)$。

- $a/k \leq 1$。此时对所有 $y > 0$ 都有 $g'(y) > g'(0) = k - a \geq 0$，所以 g 在 $y \geq 0$ 上严格递增，最小值出现在 $y = 0$：完全不作任何预备。此时期望成本为 $\frac{a}{\lambda}$。

这是合理的：每多预备一米，必定要付出 k，而只有在洪水本来会达到该高度时才能节省 a。若 $a \leq k$，节省下来的永远抵不上付出的。



第 (ii) 部分

加上常数 ky 不会改变方差，所以 $\operatorname{Var}(C) = a^2 \operatorname{Var}(W)$。至于二阶矩，用同一个代换 $u = x - y$，

$$\mathrm{E}(W^2) = \int_y^\infty (x-y)^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda y}\int_0^\infty u^2 \lambda \mathrm{e}^{-\lambda u}\,\mathrm{d}u = \mathrm{e}^{-\lambda y}\cdot\frac{2}{\lambda^2},$$

因为参数为 λ 的指数随机变量 U 满足 $\mathrm{E}(U^2) = \operatorname{Var}(U) + \mathrm{E}(U)^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2}$。因此，以 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$，

$$\operatorname{Var}(C) = a^2\left(\frac{2p}{\lambda^2} - \frac{p^2}{\lambda^2}\right) = \frac{a^2}{\lambda^2}\,\mathrm{e}^{-\lambda y}\left(2 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right).$$

预先花费的金额是 ky，由于 $k > 0$，它随 y 递增；所以我们要证明 $\operatorname{Var}(C)$ 随 y 增加而减少。求导得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\left(2\mathrm{e}^{-\lambda y} - \mathrm{e}^{-2\lambda y}\right) = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y} + 2\lambda \mathrm{e}^{-2\lambda y} = -2\lambda \mathrm{e}^{-\lambda y}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda y}\right),$$

当 $y > 0$ 时这严格为负，因为此时 $0 < \mathrm{e}^{-\lambda y} < 1$。所以 $\operatorname{Var}(C)$ 在 $y \geq 0$ 上关于 y 严格递减：预备花费越多，成本的方差越小，证明完毕。（等价地，$p(2-p) = 1 - (1-p)^2$ 在 $[0,1]$ 上随 p 递增，而 $p = \mathrm{e}^{-\lambda y}$ 随 y 递减。）

验算

- 当 $y = 0$ 时，$C = aX$，所以 $\mathrm{E}(C) = a/\lambda$ 及 $\operatorname{Var}(C) = a^2/\lambda^2$，两者都与公式吻合。
- 当 $y \to \infty$ 时方差趋向 0：极高的防洪设施几乎消除了所有不确定性，只剩下固定成本 ky。
- 取 $k = 1$、$a = 3$、$\lambda = 0.5$、$y = 1.2$，公式给出 $\mathrm{E}(C) \approx 4.493$ 及 $\operatorname{Var}(C) \approx 28.67$；以电脑模拟一百万年得到 4.496 及 28.68。对这些数值，最佳高度为 $2\ln 3 \approx 2.197$，经电脑搜索确认。

常见错误

- 把 $a(x-y)\lambda\mathrm{e}^{-\lambda x}$ 从 0 而不是从 y 开始积分：当 $X \leq y$ 时并没有洪水损失。
- 忘记边界 $y \geq 0$，即使在 $a < k$ 时仍给出 $y = \frac{1}{\lambda}\ln\frac{a}{k}$，而此时它是负数。
- 把 ky 计入方差；它是常数，对方差毫无贡献。

STEP 之外

$\mathrm{E}\big(\max(X-y,0)\big)$ 这个量正是行使价（strike price）为 y 的认购期权（call option）的收益，而最优条件 $\mathrm{P}(X>y)=k/a$ 则是运筹学（operations research）中经典的“报贩”（newsvendor）法则：选择使预备的边际成本等于期望边际节省的水平。令答案如此简洁的无记忆性，在连续分布之中是指数分布所独有的。Grimmett 与 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）涵盖了指数分布以及随机变量函数的期望值。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。