详细解答

STEP II 2015，第 12 题

概率与统计 • 硬币序列游戏

STEP II 2015，第 12 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q12

关键思路

这里每个序列的长度都是三，所以某一次抛掷会否结束游戏，只取决于该次抛掷及之前的两次。因此最自然的做法是追踪*最后两次抛掷*：可能的状态（state）只有四个（HH、HT、TH、TT），而从每个状态出发，下一次抛掷要么结束游戏，要么把我们带到另一个状态。有些状态一出现便决定了胜负；至于其余状态，我们以下一次抛掷作条件（conditioning），列出一对简单的方程。

解答

全文假设各次抛掷互相独立（independent），每次出现 H 或 T 的概率（probability）均为 $\frac{1}{2}$。头两次抛掷不可能完成任何序列，所以游戏必定会到达四个“两次抛掷”状态之一，每个的概率均为 $\frac{1}{4}$。另外要注意，游戏以概率 1 结束：无论处于甚么位置，接下来三次抛掷完成某个指定序列的概率是 $\frac{1}{8}$，所以游戏再持续超过 $3n$ 次抛掷的机会至多为 $(\frac{7}{8})^n \to 0$。

第 (i) 部分

这里只有 HHT（属于 A）和 THH（属于 B）计算在内。

若头两次抛掷是 HH：硬币会连续出现 H 一段时间，而第一个出现的 T 会完成 HHT，因为它之前至少有两个 H。在这个 T 之前从未出现过反面，所以 THH 不可能已经出现。因此 A 胜出。

若头两次抛掷中出现 T：考虑在那个 T 之后第一次出现两个连续正面的时刻。紧接这个 HH 之前的那次抛掷不可能是 H（否则在那个 T 之后便会有一个更早的 HH，或者这个 HH 就是开头的一对，而这已被排除），所以它是 T，于是 THH 已经完成。HHT 不可能

更早出现，因为它需要一个 HH，而这正是第一个。因此 B 胜出。

所以 A 胜出若且唯若头两次抛掷都是正面，从而

$$\mathrm{P}(A \text{ 胜出}) = \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{4},$$

即为所求。

第 (ii) 部分

现在 HHT、THH、TTH、HTT 四个序列全部有效。以头两次抛掷作条件。

- **HH**。与第 (i) 部分一样，抛掷结果会是 H、H、...，直至第一个 T 出现并完成 HHT。其他序列都不包含“HH 之后接 H”，而且尚未出现任何反面来开始 THH、TTH 或 HTT。因此 A 胜出。
- **TT**。把 H 和 T 的角色互换，以同样的论证可知第一个 H 会完成 TTH，所以 C 胜出。
- **HT**。若下一次是 T，便得到 HTT，D 胜出。若是 H，最后两次抛掷是 TH（而 HTH 不完成任何序列）。
- **TH**。若下一次是 H，便得到 THH，B 胜出。若是 T，最后两次抛掷是 HT（而 THT 不完成任何序列）。

所以游戏一旦进入状态 HT 或 TH，便会在这两个状态之间来回弹跳，直至 D 或 B 胜出。设 d_1 和 d_2 分别为从 HT 和从 TH 出发时 D 胜出的概率。以下一次抛掷作条件，

$$d_1 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}d_2, \qquad d_2 = \tfrac{1}{2}d_1.$$

代入得 $d_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}d_1$，所以 $d_1 = \frac{2}{3}$，$d_2 = \frac{1}{3}$。从这些状态出发只有 B 或 D 能胜出，所以 B 从 HT 出发胜出的概率是 $\frac{1}{3}$，从 TH 出发则是 $\frac{2}{3}$。因此

$$\mathrm{P}(A) = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(C) = \tfrac{1}{4},$$
$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{4}, \qquad \mathrm{P}(B) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{2}{3} = \tfrac{1}{4}.$$

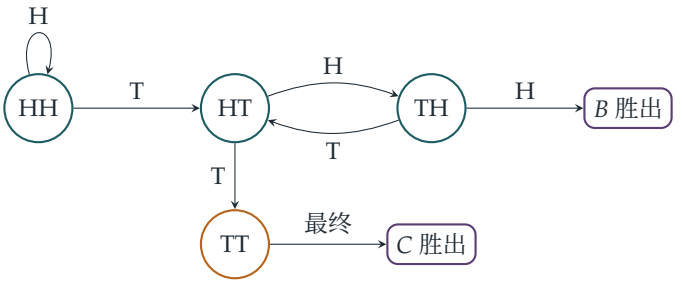
每位玩家胜出的概率都是 $\frac{1}{4}$。

第 (iii) 部分

现在只有 THH（属于 B）和 TTH（属于 C）计算在内。

头两次抛掷是 TT。之后的抛掷会是 T、T、...，直至第一个 H 出现并完成 TTH。THH 需要一个 TH 之后接 H，而 H 尚未出现过，所以 B 不可能先胜出。因此 C 以概率 1 胜出。

至于其他开局，在游戏尚未结束的前提下，看清状态（最后两次抛掷）如何转移会很有帮助：



（从 TT 出发，下一个 T 令我们留在 TT，下一个 H 则完成 TTH，所以我们可以把 TT 视为 C 胜出。）

设 p、q、r 分别为从 HT、TH、HH 出发时 C 胜出的概率：

从 *HT* 出发。T 会得到 TT，从那里 C 以概率 1 胜出；H 会得到 HTH，它不完成任何一个序列，并令我们处于状态 TH。所以

$$p = \tfrac{1}{2}\cdot 1 + \tfrac{1}{2}\cdot q = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}q,$$

即为所求。

从 *TH* 出发。H 完成 THH，所以 B 胜出；T 得到 THT，不完成任何序列，而我们处于状态 HT。所以 $q = \tfrac{1}{2}\cdot 0 + \tfrac{1}{2}p = \tfrac{1}{2}p$。

想一想 为甚么一旦知道最后两次抛掷，之前的历史便无关重要?

两个目标序列的长度都是三，所以下一次抛掷会否结束游戏，只取决于该次抛掷和之前两次。更早的抛掷无关重要，而将来的抛掷与过去独立。所以从某个状态出发 C 胜出的机会，无论我们如何到达该状态都是一样的，正因如此 q 才能在 p 的方程右方再次出现。

从 *HH* 出发。H 令我们留在 HH；T 把我们带到 HT。所以 $r = \tfrac{1}{2}r + \tfrac{1}{2}p$，得 $r = p$。

求解：$p = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}p$，所以

$$p = \tfrac{2}{3}, \qquad q = \tfrac{1}{3}, \qquad r = \tfrac{2}{3}.$$

最后，以头两次抛掷作条件（每种情况的概率均为 $\tfrac{1}{4}$），

$$\mathrm{P}(C \text{ 胜出}) = \tfrac{1}{4}(1 + p + q + r) = \tfrac{1}{4}\left(1 + \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\right) = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{8}{3} = \tfrac{2}{3}.$$

验算

- 在第 (ii) 部分，四个概率之和为 1，而且答案具有对称性：互换 H 和 T 会交换 $A \leftrightarrow C$ 及 $B \leftrightarrow D$，所以 $\mathrm{P}(A) = \mathrm{P}(C)$ 和 $\mathrm{P}(B) = \mathrm{P}(D)$ 是必然的。

- 在第 (iii) 部分，$q = \frac{1}{3} < p$ 是合理的：从 TH 出发，B 只差一次抛掷便胜出。
- 以电脑模拟（simulation）每类游戏各 200,000 局，得到第 (i) 部分 $\mathrm{P}(A) \approx 0.250$，第 (ii) 部分四位玩家都接近 0.25，第 (iii) 部分 $\mathrm{P}(C) \approx 0.667$，与沿马尔可夫链所作的精确计算吻合。

常见错误

- 假设两个长度相同的序列先出现的机会必定相等。HHT 和 THH 各自的期望等待时间（expected waiting time）都是 8 次抛掷，但 THH 每四次便有三次胜过 HHT。
- 忘记一次没有带来胜利的抛掷仍可把你带到有用的状态：从 HT 出发，抛出 H 并非单纯“失败”，而是把你带到 TH。
- 写下 $p = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}q$，却没有解释为何 HTH 令你处于与从 TH 出发相同的位置。

STEP 之外

这里的方法是踏入马尔可夫链（Markov chains）的第一步：这是一种将来只取决于当前状态的过程，可以通过解线性方程求出吸收概率（absorption probabilities）来分析。这个游戏是彭尼游戏（Penney's game）的一个版本：无论对手选择哪个由三次抛掷组成的序列，你总能选出一个以至少 $\frac{2}{3}$ 的概率胜过它的序列，所以“哪个序列先出现”并不是一个传递关系（transitive relation）。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）正是以这个程度讨论马尔可夫链和吸收概率。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。