详细解答

STEP II 2015，第 11 题

力学 · 动量与能量

STEP II 2015，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

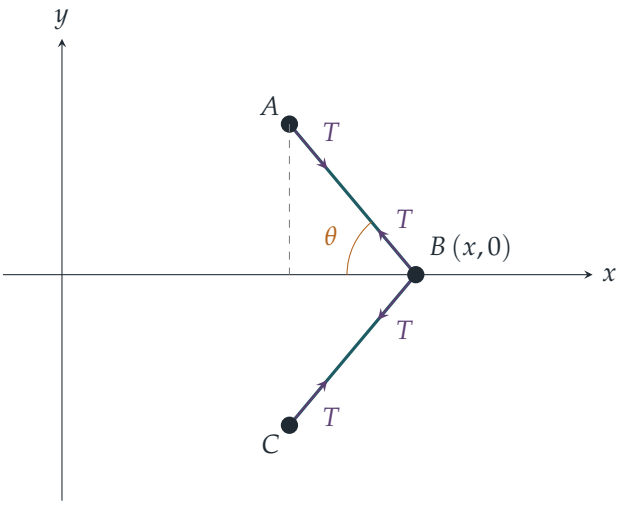
step.maths.org/questions/15-s2-q11

关键思路

由于运动始终关于 x 轴对称，两个坐标 x 和 θ 就足以描述整个系统。桌面光滑（smooth），绳子轻而不可伸长（light and inextensible），因此有两个量守恒（conserved）：x 方向的动量（momentum）和动能（kinetic energy）。这两条守恒定律直接给出 (ii) 中的两条方程；细看第二条，它告诉我们 $\dot{\theta}$ 永远不可能为零。单凭这一点，(iii) 和 (iv) 便迎刃而解。

解答

我们把 A、B、C 视为质点（particles），绳子视为轻而不可伸长。重力和法向反作用力（normal reaction）都是竖直的，所以唯一的水平力是张力（tension），而张力是系统的内力。



第 (i) 部分

A 与 B 相距 a，所在直线与 x 轴负方向成角 θ，因此

$$A = (x - a\cos\theta,\ a\sin\theta).$$

对 t 求导，并对 $\cos\theta$ 和 $\sin\theta$ 使用链式法则（chain rule），得

$$\dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ a\cos\theta\,\dot{\theta}),$$

此即所求（而 $\dot{x} = v$ 是 B 的速率）。

整个装置和冲量（impulse）在关于 x 轴的反射下都是对称的，所以运动始终保持对称：$C = (x - a\cos\theta,\ -a\sin\theta)$，其速度为 $(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta},\ -a\cos\theta\,\dot{\theta})$。

第 (ii) 部分

首先看初始值。在冲量作用的一瞬间，两条绳子都沿 y 轴，与 B 的新速度垂直，因此绳子无需猛拉 A 或 C；它们由静止开始，而 $\dot{x} = u$。总 x 方向动量为 mu，动能为 $\frac{1}{2}mu^2$。

动量。没有外部水平力，所以总 x 方向动量一直等于 mu：

$$m\dot{x} + 2m(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta}) = mu \quad\Longrightarrow\quad 3\dot{x} + 2a\dot{\theta}\sin\theta = u. \tag{1}$$

（A 和 C 的 y 方向动量互相抵消，理应如此。）这里右边是 u，即 B 的初速率。试卷印的是 v，但 v 已经用来表示 $\dot{x}$，所以这必定是 u 的误印。

能量。绳子轻而不可伸长，所以张力对整个系统所做的净功为零，而其他力亦不做功。在 A 与 C 相撞之前，动能守恒：

$$\dot{x}^2 + 2\left[(\dot{x} + a\sin\theta\,\dot{\theta})^2 + a^2\cos^2\theta\,\dot{\theta}^2\right] = u^2. \tag{2}$$

由 (1)，记 $s = \sin\theta$、$c = \cos\theta$，得

$$\dot{x} = \tfrac{1}{3}(u - 2as\dot{\theta}), \qquad \dot{x} + as\dot{\theta} = \tfrac{1}{3}(u + as\dot{\theta}).$$

代入 (2)，交叉项 $\mp 4uas\dot{\theta}$ 互相抵消：

$$\tfrac{1}{9}(u - 2as\dot{\theta})^2 + \tfrac{2}{9}(u + as\dot{\theta})^2 + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = \tfrac{1}{9}(3u^2 + 6a^2s^2\dot{\theta}^2) + 2a^2c^2\dot{\theta}^2 = u^2.$$

所以 $a^2\dot{\theta}^2(\frac{2}{3}s^2 + 2c^2) = \frac{2}{3}u^2$，即 $a^2\dot{\theta}^2(s^2 + 3c^2) = u^2$。由于 $s^2 + 3c^2 = 3 - 2s^2$，

$$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)},$$

这就是第二个结果（同样把 v 理解为 u）。

第 (iii) 部分

因为 $3 - 2\sin^2\theta \le 3$，由第 (ii) 部分得

$$\dot{\theta}^2 \ge \frac{u^2}{3a^2} > 0.$$

所以 $\dot{\theta}$ 永不为零。在两次碰撞之间它是连续的，因此保持同一符号，θ 单调（monotonically）变化。

开始时 A 静止，所以由第 (i) 部分得 $\dot{x} + a\dot{\theta} = 0$，即 $\dot{\theta} = -u/a < 0$。因此 θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 开始稳定地减小。A 和 C 的 x 坐标始终相同，而 y 坐标为 $\pm a\sin\theta$，所以它们恰好在 $\sin\theta = 0$ 时相遇。第一次碰撞发生在 $\theta = 0$，位于 B 的后方。

想一想 碰撞对 $\dot{x}$ 和 $\dot{\theta}$ 有甚么影响?

在 $\theta = 0$ 时，两条绳子都沿 x 轴，A 和 C 的 x 方向速度相同，y 方向速度为 $\pm a\dot{\theta}$。它们沿 y 方向互相接近，所以两者之间的冲量沿 y 方向。这与绳子垂直，因此不会产生冲击张力，所有 x 方向速度都不变。在等质量物体的弹性碰撞（elastic collision）中，沿连心线的速度分量会互换。所以 A 的 y 方向速度由 $a\dot{\theta}$ 变为 $-a\dot{\theta}$：碰撞只是把 $\dot{\theta}$ 的符号反转，而 $\dot{x}$ 保持不变。

碰撞前后的动量和能量都一样，所以 (1) 和 (2)，以及由此得出的 (ii) 两个结果，在下一阶段的运动中仍然成立。此时 $\dot{\theta} > 0$，而且和之前一样不可能变为零。所以 θ 从 0 开始稳定地增大，下一个使 $\sin\theta = 0$ 的值是 $\theta = \pi$。由于 $\dot{\theta} \ge u/(a\sqrt{3})$，它在有限时间内到达该值，所需时间至多为 $\pi a\sqrt{3}/u$。第二次碰撞发生在

$$\theta = \pi,$$

此时 A 和 C 在 B 的前方相遇。

第 (iv) 部分

在整个运动过程中 $\theta \in [0, \pi]$，所以 $\sin\theta \geq 0$。若 $v = \dot{x} = 0$，则由 (1) 得 $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$；两边平方并利用 (ii)，

$$4a^2\sin^2\theta \cdot \frac{u^2}{a^2(3 - 2\sin^2\theta)} = u^2 \iff 4\sin^2\theta = 3 - 2\sin^2\theta \iff \sin^2\theta = \tfrac{1}{2}.$$

所以可能的值是 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$。

> **想一想** 平方丢失了一个符号。我们实际上需要哪个符号?

我们把 $2a\dot{\theta}\sin\theta = u$ 平方了，而由于 $u > 0$，我们还需要 $\dot{\theta}\sin\theta > 0$，即 $\dot{\theta} > 0$。在 $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ 时，$\dot{\theta}^2 = \frac{u^2}{2a^2}$，所以 $\dot{\theta} = \pm\frac{u}{a\sqrt{2}}$，而 $2a\dot{\theta}\sin\theta = \pm u$。由 (1)：

- 若 $\dot{\theta} > 0$，则 $\dot{x} = \frac{1}{3}(u - u) = 0$；
- 若 $\dot{\theta} < 0$，则 $\dot{x} = \frac{1}{3}(u + u) = \frac{2}{3}u$。

所以答案是否定的。在第一次摆动中（θ 从 $\frac{\pi}{2}$ 减至 0），θ 经过 $\frac{\pi}{4}$ 时 $v = \frac{2}{3}u$。在第一次与第二次碰撞之间（θ 从 0 增至 π），在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 和 $\theta = \frac{3\pi}{4}$ 两处都有 $v = 0$。第二次碰撞后 $\dot{\theta}$ 再次为负，所以在从 π 摆回 0 的过程中，两个角度处都有 $v = \frac{2}{3}u$。之后这个规律不断重复：只有在 θ 增大的摆动中，这些角度处才有 $v = 0$。

验算

- 开始时 $\theta = \frac{\pi}{2}$，(ii) 给出 $\dot{\theta}^2 = u^2/a^2$，与直接由 A 静止得出的 $\dot{\theta} = -u/a$ 吻合。
- 由 (1)，$\dot{x} = \frac{u}{3}\left(1 - \frac{2a\dot{\theta}\sin\theta}{u}\right)$。在 $\theta = 0$ 时这等于 $\frac{u}{3}$：三个质点一起以 $\frac{u}{3}$ 运动，这正是质心（centre of mass）速度；当绳子沿 x 轴拉直时理应如此。在 θ 增大的摆动中，于 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处 $\dot{x} = -\frac{u}{3}$，所以 B 有一段时间向后移动，这解释了为何 v 两次经过 0。
- 用电脑模拟三个由极硬弹簧连接的质点，取 $a = u = 1$，结果重现了 (ii) 的两条方程。模拟显示第一次碰撞在 $\theta = 0$，第二次在 $\theta = \pi$；而 v 只在 θ 增大的摆动中、于 $\theta \approx 0.785$ 和 2.356 附近改变符号，该处 $\dot{\theta} \approx 0.707$。在第一次摆动中，模拟给出 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时 $v \approx 0.67$。

常见错误

- 把 (1) 的右边当作 $\dot{x}$：它其实是由冲量决定的常数 u。
- 以为碰撞会把 θ 送回 $\frac{\pi}{2}$，而第二次碰撞又在 $\theta = 0$ 发生。把 $\dot{\theta}$ 反转会使 θ 增大并越过 $\frac{\pi}{2}$，而且在到达 π 之前没有任何东西能使它停下，因为 $\dot{\theta}^2$ 有大于 0 的下界。

► 在第 (iv) 部分忘记平方会丢失 $\dot{\theta}$ 的符号。

STEP 之外

选取 x 和 θ 作为坐标，并用它们写出动能，正是拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）的起点，你会在大学一年级学到。在那个框架中，由于 x 不出现在能量表达式中（它是一个“可忽略”坐标（ignorable coordinate）），x 方向动量守恒会自动出现。之后能量方程把问题化为一条关于 θ 的一阶方程，正如这里一样。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对质点系统的动量和能量方法有非常详尽的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。