详细解答

STEP II 2015，第 10 题

力学 • 约束运动

STEP II 2015，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

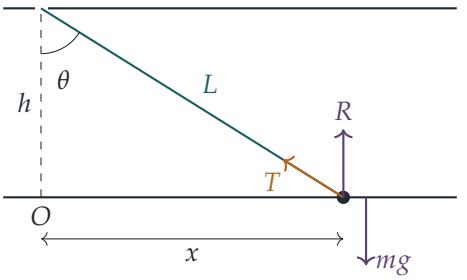
step.maths.org/questions/15-s2-q10

关键思路

这是一道约束（constraint）问题：质点的运动完全由绳子决定，所以先处理运动学（kinematics），再处理力。先把天花板下方的绳长用质点与小孔正下方那一点的水平距离表示出来，然后对时间求导；这段绳长的变化率是已知的。求得加速度后，在水平方向应用牛顿第二定律（Newton's second law）便得出张力（tension），再在铅垂方向分解力便得出法向反作用力（normal reaction）；质点留在地面期间，法向反作用力必须保持非负。

解答

我们把质点视为光滑水平地面上的一点，并把绳子视为轻而不可伸长（inextensible），因此整条绳子的张力 T 都相同。设 O 为小孔正下方地面上的一点，x 为质点与 O 的距离，L 为小孔与质点之间的绳长。



速率

由毕氏定理（Pythagoras）及图中的三角形，

$$L^2 = x^2 + h^2, \qquad x = h\tan\theta, \qquad \sin\theta = \frac{x}{L}.$$

绳子以速率 V 经小孔被拉入，所以 $\dot{L} = -V$。把 $L^2 = x^2 + h^2$ 对时间求导（h 为常数）：

$$2L\dot{L} = 2x\dot{x} \quad \Longrightarrow \quad \dot{x} = \frac{L}{x}\dot{L} = -\frac{VL}{x} = -\frac{V}{\sin\theta}.$$

因此质点以速率

$$\boxed{v = \frac{V}{\sin\theta} = V\operatorname{cosec}\theta}$$

向 O 移动，这个速率总是大于 V（以速率 V 移动的是绳子，而不是质点）。

想一想 为甚么质点的速率不就是 V，或者 $V\sin\theta$?

只有质点速度*沿绳子方向*的分量，才必须等于绳子被拉入的速率。由于绳子与地面成角 $\frac{\pi}{2} - \theta$，这个分量是 $v\sin\theta$。令 $v\sin\theta = V$，便得出与上面相同的答案，而且清楚说明了为甚么 $v > V$。

加速度

利用商法则（quotient rule）、$\dot{L} = -V$ 及 $\dot{x} = -VL/x$，再对 $\dot{x} = -VL/x$ 求导一次：

$$\ddot{x} = -V\,\frac{\dot{L}\,x - L\,\dot{x}}{x^2} = -V\,\frac{-Vx + VL^2/x}{x^2} = -\frac{V^2(L^2 - x^2)}{x^3} = -\frac{V^2h^2}{x^3}.$$

代入 $x = h\tan\theta$，得 $\ddot{x} = -\dfrac{V^2}{h\tan^3\theta}$。由于 $\dot{x}$ 和 $\ddot{x}$ 都是负数，质点正在加速：其加速度的大小为

$$\boxed{a = \frac{V^2}{h\tan^3\theta} = \frac{V^2\cos^3\theta}{h\sin^3\theta}}$$

方向指向 O。（验证一下：当 θ 减小时，$v = V/\sin\theta$ 的确增大。）

张力，以及离开地面

作用于质点的力有：重量 mg、地面施加的法向反作用力 R（由于地面光滑，此力为铅垂方向），以及沿绳子方向的张力 T；张力的水平分量为指向 O 的 $T\sin\theta$，铅垂分量为向上的 $T\cos\theta$。

在水平方向，由牛顿第二定律，

$$T\sin\theta = ma = \frac{mV^2}{h\tan^3\theta} \quad \Longrightarrow \quad \boxed{T = \frac{mV^2}{h\sin\theta\tan^3\theta} = \frac{mV^2\cos^3\theta}{h\sin^4\theta}}$$

在铅垂方向，质点留在地面期间处于平衡状态，所以

$$R + T\cos\theta = mg \quad\Longrightarrow\quad R = mg - \frac{mV^2\cos\theta}{h\sin\theta\tan^3\theta} = mg - \frac{mV^2}{h\tan^4\theta}.$$

想一想 质点被拉近时，R 怎样变化？

当质点接近 O 时，θ 减小，所以 $\tan^4\theta$ 减小，R 亦随之稳定地减小。开始时（θ 较大）R 接近 mg；只要 $R \geq 0$，质点便留在地面，而在 $R = 0$ 的第一刻离开地面，即当

$$\frac{mV^2}{h\tan^4\theta} = mg \quad\Longleftrightarrow\quad \tan^4\theta = \frac{V^2}{gh},$$

此即所求。对于更小的 θ，公式会给出 $R < 0$，这是不可能的，所以质点确实已离开地面。

验算

- 量纲（dimensions）：V^2/h 是加速度，mV^2/h 是力，而 $V^2/(gh)$ 是无量纲的，正如 $\tan^4\theta$ 必须是无量纲一样。
- 极限情况：当 $\theta \to \frac{\pi}{2}$（质点非常远）时，绳子几乎水平，$v \to V$ 且 $a \to 0$，符合预期。当 $\theta \to 0$ 时，速率和张力都趋于无限大，所以质点必定在到达 O 之前离开地面。
- 数值：取 $V = 2$、$h = 1$、$\theta = \frac{\pi}{4}$，得 $v = 2\sqrt{2} \approx 2.83$ 及 $a = 4$；以数值方法对 $x(t) = \sqrt{(L_0 - Vt)^2 - h^2}$ 求导，得出相同的数值。取 $g = 9.8$，质点在 $\theta \approx 38.6^\circ$ 时离开地面。

常见错误

- 把质点的速率当作 V 或 $V\sin\theta$，而不是 $V/\sin\theta$。
- 第二次对 $\dot{x} = -VL/x$ 求导时，忘记 L 也在变化。
- 因为绳子以恒定速率移动，便假设张力不变；其实质点在加速，所以张力并非不变。

STEP 之外

这里的质点只有一个自由度（degree of freedom）：一旦绳子的运动给定，质点在每一时刻的位置便已确定。带有这类约束的问题，可用拉格朗日力学（Lagrangian mechanics）系统地处理；这是大学课程第一或第二年会学到的内容，做法是把约束直接融入坐标的选择之中，之后才求出像 R 和 T 这样的约束力。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）收录了许多这类问题。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。