详细解答

STEP II 2015，第 1 题

纯数学 · 不等式与级数

STEP II 2015，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s2-q1

关键思路

每一条函数与对数（logarithm）之间的不等式，只要代入一个精心选取的 x 值，就会变成级数（series）中某一项与两个对数之差之间的不等式。把这些差相加，几乎所有项都会互相抵消（即该和式“伸缩相消”（telescopes）），只剩下一两个对数。技巧在于选取适当的代换，使对数能拆成一个差。

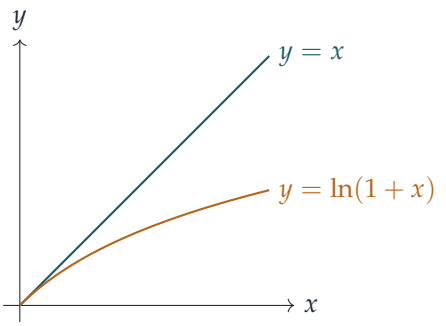
解答

第 (i) 部分

对 $x \geq 0$，设 $f(x) = x - \ln(1+x)$。那么 $f(0) = 0 - \ln 1 = 0$，而且

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x} > 0 \qquad \text{对} x > 0.$$

所以 f 在 $[0, \infty)$ 上严格递增(strictly increasing),因此对每个 $x > 0$,都有 $f(x) > f(0) = 0$。即对所有正数 x，$x > \ln(1+x)$，正是所求。



现在对正整数 k 取 $x = \frac{1}{k}$：

$$\frac{1}{k} > \ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k.$$

把 $k = 1, 2, \ldots, n$ 的各式相加，右方便伸缩相消：

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} &> (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + (\ln(n+1) - \ln n) \\ &= \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1).\end{aligned}$$

这就是所求的结果。（附带一提，由于 $\ln(n+1) \to \infty$，调和级数（harmonic series）发散（diverges）。）

第 (ii) 部分

对 $0 \le x < 1$，设 $g(x) = x + \ln(1-x)$。那么 $g(0) = 0$，而且

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1-x} = \frac{-x}{1-x} < 0 \qquad \text{对} 0 < x < 1,$$

因为在该区间内 $1 - x > 0$。所以 g 严格递减，且对 $0 < x < 1$ 有 $g(x) < 0$；即

$$x < -\ln(1-x) \qquad (0 < x < 1).$$

? **想一想** 应该代入哪个 x 值？为甚么不能用 $k = 1$？

我们希望左方是 $\frac{1}{k^2}$，所以取 $x = \frac{1}{k^2}$。这要求 $x < 1$，故 $k \ge 2$；当 $k = 1$ 时，对数 $\ln(1-1)$ 没有定义。这就是为甚么要把 $\frac{1}{1} = 1$ 这一项另外处理，而它正是上界 $1 + \ln 2$ 中的那个 1。对 $k \ge 2$，关键在于 $1 - \frac{1}{k^2}$ 可以因式分解：

$$1 - \frac{1}{k^2} = \frac{(k-1)(k+1)}{k^2},$$

所以

$$\frac{1}{k^2} < -\ln\frac{(k-1)(k+1)}{k^2} = (\ln k - \ln(k-1)) - (\ln(k+1) - \ln k).$$

记 $a_k = \ln k - \ln(k-1)$，则右方为 $a_k - a_{k+1}$。由 $k = 2$ 加至 N，和式伸缩相消：

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < a_2 - a_{N+1} = \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) < \ln 2,$$

因为 $\ln\frac{N+1}{N} > 0$。

所以部分和（partial sums）$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k^2}$ 随 N 递增，而且全部小于 $1 + \ln 2$。上有界（bounded above）的递增数列必定收敛（converges），因此这个无穷级数收敛，而其和至多为 $1 + \ln 2$。

要使不等式严格成立，须注意取极限只能保留 $\leq$，所以我们要预留一点空间。$k=2$ 时的不等式 $\frac{1}{4} < \ln\frac{4}{3}$ 是严格的；设 $\delta = \ln\frac{4}{3} - \frac{1}{4} > 0$。那么对每个 $N \geq 2$，同样的伸缩相消给出

$$\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} < \ln 2 - \ln\left(\frac{N+1}{N}\right) - \delta < \ln 2 - \delta,$$

所以取极限得 $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k^2} \leq \ln 2 - \delta < \ln 2$。加上 $k=1$ 的一项，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 1 + \ln 2,$$

这就是所求的结果。

验算

- 第 (i) 部分取 $n=1$：$1 > \ln 2 \approx 0.693$。取 $n=10$：$\sum_{k=1}^{10} \frac{1}{k} \approx 2.929$，而 $\ln 11 \approx 2.398$。
- 第 (ii) 部分：真正的和是 $\frac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$，稳稳低于 $1+\ln 2 \approx 1.6931$。事实上，我们的推导给出稍为更紧的上界 $1+\ln 2 - \delta \approx 1.6555$，其中 $\delta \approx 0.0377$。
- $\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2}$ 的伸缩相消上界 $\ln 2 - \ln\frac{N+1}{N}$，已用电脑对所有不超过 10^5 的 N 验证。

常见错误

- 连 $k=1$ 也代入 $x = \frac{1}{k^2}$：此时 $\ln(1-x)$ 没有定义；而忘记把第一项另外处理，就会漏掉 $1+\ln 2$ 中的 1。
- 只证明 $f'(x) > 0$ 而没有指出 $f(0) = 0$：一个函数可以是递增的，但仍然是负数。
- 对严格不等式取极限，却不加说明便声称极限仍是严格不等式；极限只能给出 $\leq$。

STEP 之外

把和式与对数（或积分）比较，正是积分判别法（integral test）的起点；而把第 (i) 部分加以精炼，可以证明 $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$ 收敛至欧拉常数（Euler's constant）$\gamma \approx 0.5772$。精确值 $\sum \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$ 是欧拉（Euler）对巴塞尔问题（Basel problem）的解答，大学一年级课程常以傅里叶级数（Fourier series）推导出来。我们所用的单调收敛（monotone convergence）论证，即有界递增数列必定收敛，是实分析（real analysis）的基石之一；Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对此有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。