详细解答

STEP I 2015，第 9 题

力学 · 抛体运动

STEP I 2015，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s1-q9

关键思路

“最后落地”关乎的是*落地时间*（landing time），而不是发射时间：较迟以较低仰角发射的子弹，在空中停留的时间较短，因此可能比较早发射的子弹先落地。把落地时间写成发射时间加上飞行时间（time of flight），再在整段发射期间内求其最大值。以角度 α 代替 t 作为变量，微积分会简洁得多；而 k 所满足的条件，决定了最大值出现在驻点（stationary point）还是端点。

解答

建立模型

把每颗子弹视为只受重力作用、没有空气阻力、从地面发射的质点。以仰角 α 发射的子弹，在发射后时间 s 的竖直位置为 $y = u\sin\alpha\, s - \frac{1}{2}gs^2$，所以它在经过

$$\frac{2u\sin\alpha}{g},$$

之后回到地面，而在这段时间内它的水平位移为

$$R(\alpha) = u\cos\alpha \cdot \frac{2u\sin\alpha}{g} = \frac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g}.$$

仰角为 α 的子弹在时间 $t = (\frac{1}{3}\pi - \alpha)/\lambda$ 发射；当 t 取遍 $[0, \frac{\pi}{6\lambda}]$ 时，α 取遍 $[\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$，每个值恰好取一次。因此这颗子弹的落地时间为

$$L(\alpha) = \frac{\frac{1}{3}\pi - \alpha}{\lambda} + \frac{2u\sin\alpha}{g}, \qquad \frac{1}{6}\pi \le \alpha \le \frac{1}{3}\pi.$$

最后落地的子弹，就是使 L 取最大值的那一颗。由于 $k = \dfrac{g}{2\lambda u}$，我们有 $\dfrac{2u}{g} = \dfrac{1}{\lambda k}$，以及

$$L(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\tfrac{1}{3}\pi - \alpha + \frac{\sin\alpha}{k}\right), \qquad L'(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\left(\frac{\cos\alpha}{k} - 1\right) = \frac{\cos\alpha - k}{\lambda k}.$$

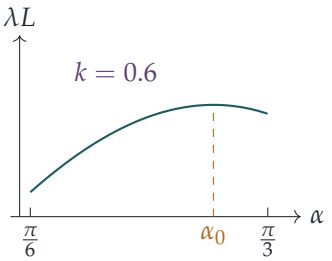
所以当 $\cos\alpha > k$ 时 L 递增，当 $\cos\alpha < k$ 时递减。在我们的区间上，$\cos\alpha$ 由 $\frac{1}{2}\sqrt{3}$（在 $\alpha = \frac{1}{6}\pi$ 处）递减至 $\frac{1}{2}$（在 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$ 处）。

想一想 为甚么 α 越大，代表发射时间越早？这一点为何会影响 L' 的正负号？

枪管正在下降，所以仰角较大的子弹先发射。把 α 稍为增大，发射时间每弧度提早 $1/\lambda$，但飞行时间每弧度增加 $\frac{2u}{g}\cos\alpha$。$L'(\alpha)$ 正是这两种效应的此消彼长，其正负号告诉我们哪一方占优。

情况 $\frac{1}{2} \le k \le \frac{1}{2}\sqrt{3}$

此时 k 落在 $\cos\alpha$ 的值域之内，所以恰好有一个 $\alpha_0 \in [\frac{1}{6}\pi, \frac{1}{3}\pi]$ 满足 $\cos\alpha_0 = k$。由于 cos 在该区间上递减，当 $\alpha < \alpha_0$ 时 $\cos\alpha > k$，当 $\alpha > \alpha_0$ 时 $\cos\alpha < k$。所以 L 在 α_0 之前递增、之后递减，以仰角 α_0 发射的子弹最后落地。（若 $k = \frac{1}{2}$ 或 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$，则 α_0 是端点，而 L 是单调的，但结论不变。）



（纵轴经过平移，好让落地时间的变化清楚可见。）

利用 $\sin\alpha_0 = \sqrt{1-k^2}$（取正值，因为 α_0 是锐角），这颗子弹的射程为

$$R(\alpha_0) = \frac{2u^2\sin\alpha_0\cos\alpha_0}{g} = \frac{2ku^2\sqrt{1-k^2}}{g},$$

这就是所求的距离。

情况 $k < \frac{1}{2}$

此时对区间内每个 α 都有 $\cos\alpha \ge \frac{1}{2} > k$，所以 $L'(\alpha) > 0$ 处处成立，L 严格递增。最大值出现在 $\alpha = \frac{1}{3}\pi$：第一颗发射的子弹最后落地。它的射程为

$$R\left(\tfrac{1}{3}\pi\right) = \frac{2u^2}{g}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}.$$

所以当 $k < \frac{1}{2}$ 时，最后一颗落地的子弹落在距离枪 $\dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$ 之处。

（为求完整：若 $k > \frac{1}{2}\sqrt{3}$，则 L 递减，最后发射的子弹最后落地；由于 $\sin\frac{\pi}{3} = \sin\frac{2\pi}{3}$，距离同样是 $\frac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$。）

验算

- 连续性：在 $k = \frac{1}{2}$ 时，第一条公式给出 $\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}u^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{g} = \dfrac{\sqrt{3}\,u^2}{2g}$，与 $k < \frac{1}{2}$ 的答案一致；在 $k = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ 时，它亦给出相同的值。
- 取 $u^2/g = 1$ 及 $k = 0.6$，最后落地的子弹满足 $\cos\alpha_0 = 0.6$，落在距离 $2(0.6)(0.8) = 0.96$ 之处。以电脑抽取两万个发射时间，并以数值方法逐步模拟该子弹的运动，结果吻合。
- 单位：k 是无量纲的（g 除以 λu，后者是速度每单位时间），而 u^2/g 是长度。

常见错误

- 只求射程或飞行时间的最大值，而不是落地时间 $t + \frac{2u\sin\alpha}{g}$ 的最大值。
- 想当然地以为最后发射的子弹就是最后落地的。
- 忘记 t 随 α 增大而减少，以致弄错 L' 的正负号。

STEP 之外

在闭区间上求函数的最大值，就是把区间内部的驻点与端点互相比较；而在这里，由一个参数决定哪一方胜出。这种“哪个约束生效”的切换，正是约束最优化（constrained optimisation）的起点，你会在大学一年级的数学方法课程中遇到。如想阅读更多这类风格的力学内容，可参考 Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。