详细解答

STEP I 2015，第 8 题

纯数学 · 幂和的整除性

STEP I 2015，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s1-q8

关键思路

把和式写两次，一次顺序、一次倒序，然后相加：这是第 (i) 部分所用的高斯（Gauss）技巧，而当各项是 k 次幂且 k 为奇数时，第 (ii) 部分正是为此而设的。把 r^k 与 $(n-r)^k$ 配对，可证 $2S$ 是 n 的倍数；把 r^k 与 $(n+1-r)^k$ 配对，可证 $2S$ 也是 $n+1$ 的倍数。由于 n 与 $n+1$ 没有公因数，两个结果合起来便得出能被 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除（divisible）。

解答

第 (i) 部分

设 $T = 1+2+\cdots+n$。把和式倒序写出，

$$T = 1+2+\cdots+(n-1)+n,$$
$$T = n+(n-1)+\cdots+2+1.$$

把各列相加，n 列中每一列之和都是 $n+1$，所以 $2T = n(n+1)$，即

$$1+2+\cdots+n = \tfrac{1}{2}n(n+1).$$

第 (ii) 部分

在模 N 下考虑，有 $N-m \equiv -m$，所以

$$(N-m)^k + m^k \equiv (-m)^k + m^k = -m^k + m^k = 0 \pmod{N},$$

其中因为 k 是奇数，所以 $(-m)^k = -m^k$。因此 N 整除 $(N-m)^k + m^k$。

如果你想避免使用同余（congruence）：当 k 为奇数时，有以下因式分解（factorisation）

$$a^k + b^k = (a+b)(a^{k-1} - a^{k-2}b + a^{k-3}b^2 - \cdots + b^{k-1}),$$

（符号正负交替，括号内共有 k 项，所以最后一个符号是 $+$）。取 $a = N - m$、$b = m$，便得 $a + b = N$ 乘以一个整数。这里完全不需要 $m \le N$：若 $m > N$，则 $N - m$ 是负数，但它仍然是整数。

被 n 或 $\frac{1}{2}n$ 整除

设 $S = 1^k + 2^k + \cdots + n^k$，其中 k 为奇数。我们仿照第 (i) 部分的技巧。由于 $0^k = 0$，可以写成

$$S = \sum_{r=0}^{n} r^k = \sum_{r=0}^{n} (n-r)^k,$$

第二种写法就是同一个和式倒序排列。相加得

$$2S = \sum_{r=0}^{n} \Big[(n-r)^k + r^k \Big].$$

由第 (ii) 部分（取 $N = n$、$m = r$），每个方括号都能被 n 整除，所以 n 整除 $2S$。设 $2S = nM$，其中 M 为整数。

- 若 n 为奇数，则 n 整除 $2S$ 且与 2 没有公因数，所以 n 整除 S。
- 若 n 为偶数，则 $S = \frac{1}{2}n \cdot M$，而 $\frac{1}{2}n$ 是整数，所以 $\frac{1}{2}n$ 整除 S。

> ? **想一想** 当 n 为偶数时，为甚么不能直接说“n 整除 S”？

因为由“$n \mid 2S$”推出“$n \mid S$”这一步，需要 n 与 2 互质（coprime）。事实上这一步可能不成立：取 $n = 2$、$k = 1$，得 $S = 3$，它不是 2 的倍数。对于偶数 n，我们只能说 n 的一半整除 S。

被 $1 + 2 + \cdots + n$ 整除

由第 (i) 部分，我们需要证明 $\frac{1}{2}n(n+1) \mid S$。换一种方式配对：把 $1, 2, \ldots, n$ 倒序排列，会把 r 变成 $n + 1 - r$，所以

$$2S = \sum_{r=1}^{n} \Big[(n+1-r)^k + r^k \Big],$$

而由第 (ii) 部分（取 $N = n + 1$、$m = r$），每个方括号都能被 $n + 1$ 整除。所以 $n + 1$ 整除 $2S$。

n 与 $n + 1$ 是相邻整数，所以除了 1 以外没有其他公因数；于是 n 的任何因数与 $n + 1$ 的任何因数也是如此。我们用到以下事实：若两个互质的整数各自整除 S，则它们的积也整除 S。

- n 为奇数。我们已证明 $n \mid S$。此外 $n+1$ 是偶数且 $n+1 \mid 2S$，所以写成 $2S = (n+1)L$，得 $S = \frac{1}{2}(n+1)L$，即 $\frac{1}{2}(n+1) \mid S$。由于 n 与 $\frac{1}{2}(n+1)$ 互质，它们的积 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除 S。
- n 为偶数。我们已证明 $\frac{1}{2}n \mid S$。此外 $n+1$ 是奇数且整除 $2S$，所以（由于它与 2 互质）它整除 S。由于 $\frac{1}{2}n$ 与 $n+1$ 互质，它们的积 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 整除 S。

两种情况下，S 都能被 $\frac{1}{2}n(n+1) = 1+2+\cdots+n$ 整除，证毕。

想一想 为甚么可以把两个整除结果合而为一，把除数相乘?

若 $a \mid S$、$b \mid S$ 且 $\gcd(a,b) = 1$，写 $S = aq$。那么 $b \mid aq$，而 b 与 a 没有公共质因数，所以整除 b 的每个质数幂都必定整除 q；因此 $b \mid q$，从而 $ab \mid S$。没有互质这个条件，结论便不成立：$4 \mid 12$ 且 $6 \mid 12$，但 $24 \nmid 12$。正因如此，我们才小心地把 n 与 $\frac{1}{2}(n+1)$ 配对，或把 $\frac{1}{2}n$ 与 $n+1$ 配对，而不是在 n 为偶数时把 n 与 $n+1$ 配对。

验算

试取 $k = 3$、$n = 4$：$S = 1+8+27+64 = 100$，而 $1+2+3+4 = 10$ 整除 100。事实上 $1^3+\cdots+n^3 = \left(\frac{1}{2}n(n+1)\right)^2$，所以 $k = 3$ 时结果是显然的。取 $k = 5$、$n = 5$：$S = 1+32+243+1024+3125 = 4425 = 15 \times 295$。最终结果亦已用电脑验证，对所有 $n \le 119$ 及所有奇数 $k \le 15$ 均成立。当 k 为偶数时，命题不成立：$1^2+2^2 = 5$ 不能被 3 整除，这说明 k 为奇数这个条件确实用上了。

常见错误

- 在 n 为偶数时，由 $n \mid 2S$ 推出 $n \mid S$。
- 把不互质的除数相乘，例如声称 $n(n+1) \mid 2S$，然后不加小心地除以 2。
- 把 r^k 与 $(n-r)^k$ 配对时忘记 $r = 0$（或 $r = n$）这一项：把 $0^k = 0$ 包括在内，每一项便能整齐地配对。

STEP 之外

幂和（power sum）$1^k+\cdots+n^k$ 是 n 的 $k+1$ 次多项式，可由 Faulhaber 公式以伯努利数（Bernoulli numbers）表示；当 k 为奇数时，它们甚至可以写成 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 的多项式，这从另一角度解释了本题的结果。这里的论证让你初尝运用同余与互质的滋味，而这些正是初等数论（elementary number theory）的基本功。Davenport 的 *The Higher Arithmetic*

（《高等算术》）是一本很出色的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。