详细解答

STEP I 2015，第 7 题

纯数学 • 区间上的最大值

> **STEP I 2015，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q7

关键思路

光滑函数（smooth function）在闭区间（closed interval）上的最大值，必定在区间内部的驻点（stationary point）或在端点（endpoint）取得。这里的驻点是 $x = 0$ 和 $x = \frac{a}{3}$，而后者会随着 a 增大向右移动，最终离开区间。因此我们先列出所有候选值，再随着 a 变化逐一比较：三个范围正是来自比较结果转换之处，以及 $\frac{a}{3}$ 越过 $x = 1$ 之处。

解答

候选值

求导，得

$$f'(x) = 6ax - 18x^2 = 6x(a - 3x),$$

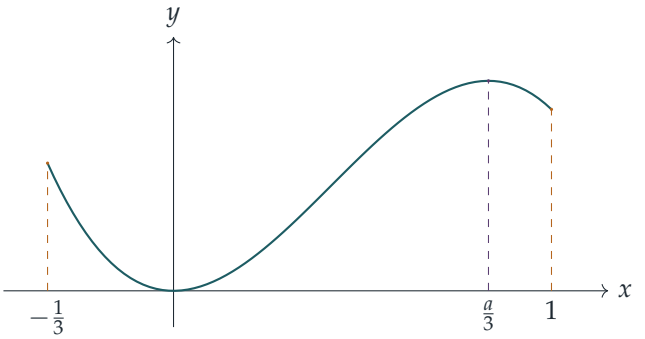
所以驻点是 $x = 0$ 和 $x = \frac{a}{3}$。当 $a \geq 0$ 时，f' 的正负号告诉我们函数的形状：

- 当 $x < 0$ 时，$6x < 0$ 而 $a - 3x > 0$，所以 $f'(x) < 0$，f 递减；
- 当 $0 < x < \frac{a}{3}$ 时，$f'(x) > 0$，f 递增；
- 当 $x > \frac{a}{3}$ 时，$f'(x) < 0$，f 递减。

所以 $x = 0$ 是局部极小值（local minimum）点，$x = \frac{a}{3}$ 是局部极大值（local maximum）点（当 $a = 0$ 时两者重合，而 $f = -6x^3$ 处处递减）。我们需要的函数值是

$$f\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9}, \qquad f\left(\tfrac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{3} - \frac{2a^3}{9} = \frac{a^3}{9}, \qquad f(1) = 3a - 6.$$

由于 f 在 $[-\frac{1}{3}, 0]$ 上递减，这一段上的最大值是 $f(-\frac{1}{3})$；而 $f(0) = 0$ 永远不会是最大值。所以 $\mathrm{M}(a)$ 就是 $f(-\frac{1}{3})$ 与 f 在 $[0, 1]$ 上最大值两者中较大的一个。



上图显示 $a = \frac{5}{2}$ 的情况：三个候选值是两个端点（琥珀色）和局部极大值（紫红色），在这里胜出的是局部极大值。

情况 $0 \le a \le 3$

此时 $\frac{a}{3} \in [0,1]$，所以在 $[0,1]$ 上函数先上升至 $x = \frac{a}{3}$，然后下降。它在这一段上的最大值是 $f(\frac{a}{3}) = \frac{a^3}{9}$，我们要把它与 $f(-\frac{1}{3})$ 比较：

$$\frac{a^3}{9} - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{a^3 - 3a - 2}{9} = \frac{(a+1)^2(a-2)}{9}.$$

? **想一想** 怎样看出 $a^3 - 3a - 2$ 的因式分解（factorisation）?

试代入一些小整数：$a = -1$ 给出 $-1 + 3 - 2 = 0$，$a = 2$ 给出 $8 - 6 - 2 = 0$。三个根之和是 0（因为没有 a^2 项），所以第三个根又是 -1，于是得到 $(a+1)^2(a-2)$。

由于当 $a \ge 0$ 时 $(a+1)^2 > 0$，差的正负号与 $a - 2$ 相同。因此

$$\mathrm{M}(a) = \frac{a}{3} + \frac{2}{9} \quad \text{当} 0 \le a \le 2, \qquad \mathrm{M}(a) = \frac{a^3}{9} \quad \text{当} 2 \le a \le 3,$$

而两条公式在 $a = 2$ 时都给出 $\frac{8}{9}$。

情况 $a > 3$

此时 $\frac{a}{3} > 1$，所以 f 在整个 $[0,1]$ 上递增，它在这一段上的最大值是 $f(1) = 3a - 6$。与左端点比较，

$$(3a - 6) - \left(\frac{a}{3} + \frac{2}{9}\right) = \frac{8a}{3} - \frac{56}{9} = \frac{8}{9}(3a - 7),$$

由于 $a > 3 > \frac{7}{3}$，这个值是正数。所以当 $a \ge 3$ 时 $\mathrm{M}(a) = 3a - 6$；在 $a = 3$ 时它等于 $3 = \frac{27}{9}$，与中间那条公式吻合。

结论

$$\mathrm{M}(a) = \begin{cases} \dfrac{a}{3} + \dfrac{2}{9}, & 0 \le a \le 2, \\ \dfrac{a^3}{9}, & 2 \le a \le 3, \\ 3a - 6, & a \ge 3. \end{cases}$$

换句话说：a 较小时左端点胜出，a 适中时局部极大值胜出，而一旦局部极大值离开了区间，就由右端点胜出。

验算

- M 是连续（continuous）的：在 $a = 2$ 时两边都是 $\frac{8}{9}$，在 $a = 3$ 时两边都是 3。这是必然的，因为最大值随 a 连续变化。
- $a = 0$：$f(x) = -6x^3$ 递减，所以其最大值是 $f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$，与第一条公式一致。
- $a = \frac{5}{2}$：公式给出 $\frac{125}{72} \approx 1.736$，而两个端点分别给出 $f(-\frac{1}{3}) \approx 1.056$ 和 $f(1) = 1.5$，两者都较小。以电脑在精细的 x 网格上搜索，对 0 至 12 之间数百个 a 值进行验算，结果与公式的误差在 10^{-8} 以内。

常见错误

- 忘记了左端点 $x = -\frac{1}{3}$。由于 f 在 $x < 0$ 时递减，这个端点有可能胜过局部极大值，而当 $a < 2$ 时确实如此。
- 在 $a > 3$ 时仍使用 $f(\frac{a}{3})$，但此时 $\frac{a}{3}$ 已在区间之外，因此不能采用。
- 以为局部极大值自然就是区间上的最大值。

STEP 之外

这里的 $\mathrm{M}(a) = \max_{x \in [-1/3, 1]} f(x)$ 是通过对一族函数求最优值而定义的函数，这类函数通常是连续的，但只是分段光滑（piecewise smooth）：你可以验证 M 在 $a = 2$ 处的左导数与右导数并不相等。至于闭有界区间上的连续函数必定能取得最大值，这就是极值定理（Extreme Value Theorem），会在第一门分析课中证明；参见 Abbott，*Understanding Analysis*（《理解分析》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。