详细解答

STEP I 2015，第 6 题

纯数学 · 几何中的向量

STEP I 2015，第 6 题

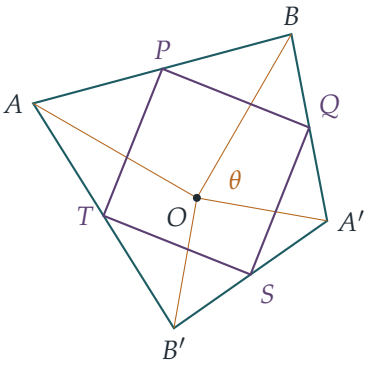
继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s1-q6

关键思路

以 O 为原点，条件 $OA = OB$ 及 $\angle AOB = 90°$ 表示 B 是 A 绕 O 旋转（rotation）一个直角所得的点；同样地，B' 是 A' 以相同方向旋转所得的点。把这个四分之一转记作 R。于是中点四边形的每一条边，原来都是前一条边经 R 作用后的结果，而这正正就是构成正方形的条件。一旦以 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{a}'$ 表示出边长，面积就只是一道余弦定理（cosine rule）的计算。

解答



中点构成正方形

取 O 为原点，并以 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{a}', \mathbf{b}'$ 表示 A, B, A', B' 的位置向量（position vector）。设 R 为绕 O 顺时针旋转 90°。它是线性（linear）的，保持长度不变，并把每个非零向量转过一个

直角。

由于顶点按顺时针方向排列，而 O 位于四边形内部，从 OA 到 OB 是顺时针转 $90°$。又因 $OA = OB$，得 $\mathbf{b} = R\mathbf{a}$。同理 $\mathbf{b}' = R\mathbf{a}'$。

设 P, Q, S, T 分别为 AB、BA'、$A'B'$、$B'A$ 的中点：

$$\mathbf{p} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}+\mathbf{b}), \quad \mathbf{q} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}+\mathbf{a}'), \quad \mathbf{s} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'+\mathbf{b}'), \quad \mathbf{t} = \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'+\mathbf{a}).$$

现在逐一考虑四条边。设 $\mathbf{u} = \overrightarrow{PQ}$：

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PQ} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = \mathbf{u},\\
\overrightarrow{QS} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}'-\mathbf{b}) = \tfrac{1}{2}R(\mathbf{a}'-\mathbf{a}) = R\mathbf{u},\\
\overrightarrow{ST} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{a}-\mathbf{a}') = -\mathbf{u},\\
\overrightarrow{TP} &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{b}-\mathbf{b}') = -R\mathbf{u}.
\end{aligned}$$

这里 $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$，因为 $A \neq A'$。所以 PQ 与 ST 大小相等、方向相反，故 $PQST$ 是平行四边形（parallelogram）。它的邻边 QS 是把 $\mathbf{u}$ 转过一个直角而长度不变所得。邻边相等且互相垂直的平行四边形是正方形，因此 $PQST$ 是正方形，得证。

想一想 为甚么把 A 转到 B 的四分之一转，必定与把 A' 转到 B' 的是同一个？

两对点在顺时针标记中都是前后相连的，而 O 位于内部，所以两种情况下由第一条射线转到第二条射线都是顺时针方向。若其中一个是顺时针而另一个是逆时针，由 $\overrightarrow{QS}$ 得出 $R\mathbf{u}$ 的那一步便不成立，而一般来说所得图形也不会是正方形。

求面积的最大值

设 $OA = OB = p$ 及 $OA' = OB' = q$，两者皆固定，并设 $\theta = \angle BOA'$。O 处的四个角之和为 $360°$，其中两个是直角，所以 $\angle B'OA = 180° - \theta$。由于 O 位于内部，θ 和 $180° - \theta$ 都严格介乎 $0°$ 与 $180°$ 之间，故 $0 < \theta < 180°$。

正方形的边长为 $|\mathbf{u}| = \frac{1}{2}AA'$，所以面积为 $\frac{1}{4}AA'^2$。由 OA 经 OB 转到 OA'，$\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{a}'$ 之间的夹角为 $90° + \theta$，而 $\cos(90° + \theta) = -\sin\theta$。由余弦定理（或展开 $|\mathbf{a}' - \mathbf{a}|^2$），

$$AA'^2 = p^2 + q^2 - 2pq\cos(90° + \theta) = p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta,$$

所以

$$\text{面积} = \tfrac{1}{4}\left(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta\right).$$

在 p 和 q 固定的情况下，当 $\sin\theta$ 最大时此式最大。在 $0 < \theta < 180°$ 上，这恰好发生于

$$\angle BOA' = \theta = 90°,$$

而最大面积为 $\frac{1}{4}(p+q)^2$。此时 O 处的四个角全是直角，所以 A' 位于 AO 越过 O 的延长线上，而正方形的边长为 $\frac{1}{2}(p+q)$。

验算

- 取 $p = 2$、$q = 3$。面积公式给出 $\frac{1}{4}(13 + 12\sin\theta)$，在 $\theta = 0$ 附近为 3.25，在 $\theta = 90°$ 时升至 $6.25 = \frac{1}{4} \cdot 5^2$，然后回落至接近 3.25。以电脑对 θ 作精细扫描，得出峰值位于 90.0°。
- 对称情况 $p = q$、$\theta = 90°$：$ABA'B'$ 本身就是一个以 O 为中心、边长为 $p\sqrt{2}$ 的正方形，而其中点正方形的边长为 p，面积为 $p^2 = \frac{1}{4}(2p)^2$，与公式相符。
- 随机选取 p、q 和 θ，经电脑验证，各中点确实构成面积为 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 + 2pq\sin\theta)$ 的正方形。

常见错误

- 把 OA 与 OA' 之间的夹角当作 θ，而不是 $90° + \theta$。这会得出面积 $\frac{1}{4}(p^2 + q^2 - 2pq\cos\theta)$，并错误地推断 θ 应趋近 180°。
- 只证明四条边相等。这只能得出菱形（rhombus）。你还需要一个直角，而这里由 $\overrightarrow{QS} = R\,\overrightarrow{PQ}$ 便可直接得到。

STEP 之外

旋转一个直角是一个线性映射（linear map）$R(x, y) = (y, -x)$，在复平面（complex plane）上则是乘以 $-\mathrm{i}$。整个论证其实是一道关于线性映射的计算：$\mathbf{q} - \mathbf{p}$ 与 $\mathbf{s} - \mathbf{q}$ 相差一个 R，因为 R 与减法可交换（commute）。同样的思路可以迅速证明拿破仑定理（Napoleon's theorem）和 van Aubel 定理（van Aubel's theorem）等结果。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）正是以这种方式，通过复数乘法来发展几何。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。