详细解答

STEP I 2015，第 5 题

纯数学 • 含参数的积分

STEP I 2015，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s1-q5

关键思路

两个积分在把 x 视为固定参数（parameter）时，对 t 都有初等的原函数（antiderivative），所以题目中“通过计算积分”这句指示已经是全部提示：先求出关于 x 的闭式（closed form），再作其草图。要小心的是细节。在 (i) 中，被积函数（integrand）在 $t = 1$ 处可能无界（unbounded）；在 (ii) 中，平方根计算出来是绝对值（*absolute values*），这使 g 成为一个分段函数（piecewise function），而其形状出奇地简单。

解答

第 (i) 部分

对固定的 $x > 0$，$(t-1)^{x-1}$ 的一个原函数是 $\frac{1}{x}(t-1)^x$。因此

$$f(x) = \left[\frac{(t-1)^x}{x}\right]_1^3 = \frac{2^x - 0}{x} = \frac{2^x}{x}.$$

当 $0 < x < 1$ 时，被积函数 $(t-1)^{x-1}$ 在 $t \to 1^+$ 时趋于无穷，所以这是一个反常积分（improper integral）；但由于 $x > 0$，当 $t \to 1^+$ 时 $(t-1)^x \to 0$，所以积分收敛（converges），上面的值仍然成立。

现在作 $y = 2^x/x$（$x > 0$）的草图。

- 当 $x \to 0^+$ 时，$2^x \to 1$，所以 $f(x) \to +\infty$：y 轴是一条渐近线（asymptote）。
- 当 $x \to \infty$ 时，指数函数的增长胜过幂函数，所以 $f(x) \to \infty$（而且比任何直线都快）。

- 求导，利用 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}2^x = 2^x \ln 2$，

$$f'(x) = \frac{2^x \ln 2 \cdot x - 2^x}{x^2} = \frac{2^x(x \ln 2 - 1)}{x^2},$$

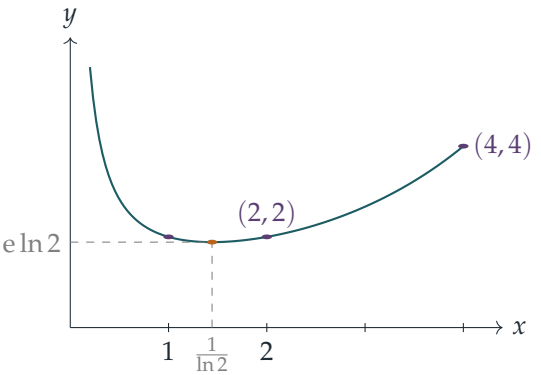
它在 $x < 1/\ln 2$ 时为负，在 $x > 1/\ln 2$ 时为正。所以只有一个驻点（stationary point），是一个极小点（minimum），位于 $x = 1/\ln 2 \approx 1.44$。

- 在该点，$2^{1/\ln 2} = \mathrm{e}^{(\ln 2)/\ln 2} = \mathrm{e}$，所以极小值为

$$f\left(\frac{1}{\ln 2}\right) = \mathrm{e} \ln 2 \approx 1.88.$$

- 有用的点：$f(1) = f(2) = 2$，$f(4) = 4$。

这条曲线也是凸（convex）的：$\ln f(x) = x \ln 2 - \ln x$ 是凸函数（其二阶导数为 $1/x^2 > 0$），而凸函数的指数仍是凸函数。所以草图是一条单一的 U 形曲线。



第 (ii) 部分

首先，被积函数是有意义的：对 $-1 \le t \le 1$，

$$1 - 2xt + x^2 \ge 1 - 2|x| + x^2 = (1 - |x|)^2 \ge 0,$$

等号只在 $|x| = 1$ 且 $t = \pm 1$（端点）时成立。这个情况我们稍后再处理。

当 $x = 0$ 时，被积函数为 1，所以 $g(0) = 2$。当 $x \ne 0$ 时，把 x 视为常数：由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(1 - 2xt + x^2) = -2x$，一个原函数是 $-\frac{1}{x}\sqrt{1 - 2xt + x^2}$。因此

$$g(x) = -\frac{1}{x}\left[\sqrt{1 - 2xt + x^2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{(1+x)^2} - \sqrt{(1-x)^2}}{x} = \frac{|1+x| - |1-x|}{x}.$$

想一想 为甚么不直接写 $\sqrt{(1+x)^2} = 1 + x$ 和 $\sqrt{(1-x)^2} = 1 - x$?

因为 $\sqrt{u^2} = |u|$，而不是 u。粗心地这样做会得出对所有 x 都有 $g(x) = 2$，这在 $|x|$ 很大时肯定是错的，因为那时被积函数约为 $1/|x|$，所以 $g(x) \approx 2/|x|$。我们必须分情况讨论。

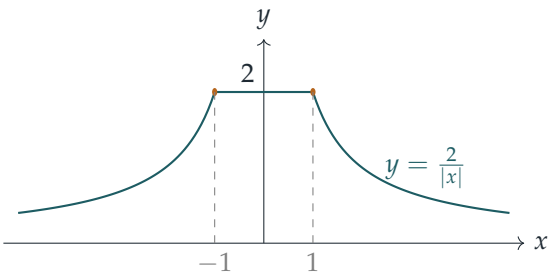
- $-1 \le x \le 1$，$x \neq 0$：$1+x$ 和 $1-x$ 都 ≥ 0，所以 $g(x) = \dfrac{(1+x)-(1-x)}{x} = 2$。这也与 $g(0) = 2$ 一致。
- $x > 1$：$|1+x| = 1+x$ 而 $|1-x| = x-1$，所以 $g(x) = \dfrac{2}{x}$。
- $x < -1$：$|1+x| = -1-x$ 而 $|1-x| = 1-x$，所以 $g(x) = \dfrac{-2}{x} = \dfrac{2}{|x|}$。

在 $x = \pm 1$ 时，被积函数在其中一个端点无界（当 $x = 1$ 时它是 $1/\sqrt{2-2t}$，在 $t \to 1$ 时趋于无穷），所以这是反常积分。原函数 $-\sqrt{2-2t}$ 直到 $t = 1$ 都是连续的，所以积分收敛，而公式仍然给出 $g(\pm 1) = 2$。

所以

$$g(x) = \begin{cases} 2, & |x| \le 1, \\ \dfrac{2}{|x|}, & |x| \ge 1. \end{cases}$$

这个函数是偶函数（even function）（这是必然的：把 t 换成 $-t$ 即可证明 $g(-x) = g(x)$）。它处处连续（continuous），在 $[-1, 1]$ 上为常数，并以 $2/|x|$ 的方式衰减，趋向渐近线 $y = 0$。在 $x = \pm 1$ 处有一个尖角：两侧的单侧斜率分别为 0（内侧）和 ∓ 2（外侧），所以 g 在该处不可微（differentiable）。



验算

- 第 (i) 部分取 $x = 1$：被积函数为 1，所以 $f(1) = 2$，与 $2^1/1$ 吻合。取 $x = 2$ 时积分为 $\int_1^3 (t-1)\,\mathrm{d}t = 2$，与 $2^2/2$ 吻合。
- 第 (ii) 部分取 $x = 0$：被积函数为 1，而 $g(0) = 2$。当 $|x|$ 很大时，被积函数在长度为 2 的区间上接近 $1/|x|$，与 $2/|x|$ 吻合。
- 数值上，$\int_1^3 (t-1)^{0.5}\,\mathrm{d}t = 1.8856\ldots = 2^{1.5}/1.5$；(ii) 中的积分在 $x = 1.2$ 时算得 $1.6667 = 2/1.2$，在 $x = 0.8$ 时算得 2.0000。

常见错误

- 对所有 x 都写 $\sqrt{(1-x)^2} = 1-x$，从而得出 g 是常数的结论。
- 忘记 (i) 中的积分在 $0 < x < 1$ 时是反常积分，或忘记 $(t-1)^x$ 在 $t = 1$ 处为零只是因为 $x > 0$。
- 把 g 在 $x = \pm 1$ 处画成光滑的：两段曲线以不同的斜率相接。

STEP 之外

第 (ii) 部分其实是乔装了的牛顿（Newton）壳层定理（shell theorem）。设 $t = \cos\theta$，则 $1/\sqrt{1-2xt+x^2}$ 是从距单位球面球心 x 的一点到球面上一点的距离的倒数，所以 g（相差一个常数）就是均匀球壳的引力势（gravitational potential）：在壳内为常数，在壳外则等同一个点质量的引力势。同一个式子也是勒让德多项式（Legendre polynomials）的生成函数（generating function）$\sum_n P_n(t)x^n$，而 $|x| < 1$ 时 $g(x) = 2$ 反映了一个事实：每个 $n \geq 1$ 的 P_n 在 $[-1,1]$ 上的积分都是零。第 (i) 部分把 x 当作参数来积分 t^{x-1}，正是通往伽玛函数（Gamma function）和贝塔函数（Beta function）的第一步。Mary Boas 的 *Mathematical Methods in the Physical Sciences*（《物理科学中的数学方法》）以恰到好处的程度介绍了勒让德多项式和伽玛函数。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。