详细解答

STEP I 2015，第 4 题

纯数学 · 参数曲线与面积

> **STEP I 2015，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q4

关键思路

以曲线的斜率（gradient）作为参数。若中点处的切线（tangent）与 x 轴成角 θ，则该处的斜率为 $\tan\theta$，由此便确定了中点的位置。棒的每一端都沿单位向量（unit vector）$(\cos\theta, \sin\theta)$ 方向与中点相距 b。至于面积，半条棒 AP 正好落在 P 点的切线上，所以所求区域其实就是抛物线（parabola）与它的一条切线之间的空隙，而对应的被积函数（integrand）是一个完全平方（perfect square）。

解答

一端的轨迹

设中点为 P，并设棒与 x 轴正方向成角 θ。由于 $y = \frac{1}{4}x^2$ 有 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{2}x$，而棒在 P 点与曲线相切，故

$$\tfrac{1}{2}x_P = \tan\theta, \qquad \text{故} \qquad P = (2\tan\theta,\ \tan^2\theta).$$

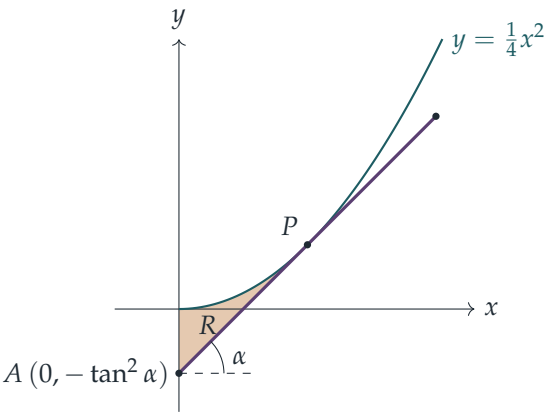
条件 $x \geq 0$ 给出 $\tan\theta \geq 0$，因此可取 $0 \leq \theta < \frac{1}{2}\pi$。当 θ 在这个范围内变动时，$2\tan\theta$ 取遍 $[0, \infty)$ 中的每一个值，所以中点的每一个位置都恰好对应一个 θ。

沿棒方向的单位向量是 $(\cos\theta, \sin\theta)$，而每一端与 P 相距 b，所以两端位于 $P \pm b(\cos\theta, \sin\theta)$。取负号（即较低、靠左的一端），得

$$x = 2\tan\theta - b\cos\theta,$$
$$y = \tan^2\theta - b\sin\theta,$$

正如所求。（另一端所描出的轨迹满足相同的方程，只是把 $-b$ 换成 $+b$。）

R 的面积



到达 y 轴的是满足 $x = 2\tan\theta - b\cos\theta$ 的那一端：另一端的 $x = 2\tan\theta + b\cos\theta > 0$ 恒成立。所以当 $\theta = \alpha$ 时，

$$2\tan\alpha = b\cos\alpha.$$

A 的 y 坐标是 $\tan^2\alpha - b\sin\alpha$，利用上一条方程可消去 b：

$$b\sin\alpha = (b\cos\alpha)\tan\alpha = 2\tan^2\alpha, \qquad \text{故} \qquad A = (0, -\tan^2\alpha).$$

想一想 A 相对于原点在甚么位置？直线 AP 的方程是甚么？

A 位于原点下方，而直线 AP 正是抛物线在 P 点的切线。记 $t = \tan\alpha$。在 $P = (2t, t^2)$ 的切线斜率为 t，所以其方程为

$$y = t^2 + t(x - 2t) = tx - t^2,$$

它确实经过 $A = (0, -t^2)$。抛物线位于这条切线上方，因为

$$\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2) = (\tfrac{1}{2}x - t)^2 \geq 0.$$

因此 R 是满足 $0 \leq x \leq 2t$、并介乎直线 AP（下方）与曲线（上方）之间的点的集合，其左边界是 y 轴上由 A 向上至 O 的线段。所以

$$\begin{aligned} \text{面积}R &= \int_0^{2t} \left(\tfrac{1}{4}x^2 - (tx - t^2)\right) \mathrm{d}x = \int_0^{2t} (\tfrac{1}{2}x - t)^2 \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\tfrac{2}{3}(\tfrac{1}{2}x - t)^3\right]_0^{2t} = 0 - \tfrac{2}{3}(-t)^3 = \tfrac{2}{3}t^3. \end{aligned}$$

所以 R 的面积是 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$，正如所求。

留意 b 完全消失了：面积只取决于 P 点的切线与 y 轴相交的位置。当然，b 与 α 之间有关系式 $2\sin\alpha = b\cos^2\alpha$，所以 b 决定了 α。

验算

- 取 $\alpha = \frac{1}{4}\pi$（如图所示）。由 $b\cos\alpha = 2$ 得 $b = 2\sqrt{2}$，此时 $P = (2,1)$，$A = (0,-1)$。面积为 $\int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \frac{2}{3} - 2 + 2 = \frac{2}{3} = \frac{2}{3}\tan^3\frac{1}{4}\pi$。
- 当 $b = 2$ 时，以数值方法解 $2\tan\alpha = 2\cos\alpha$ 得 $\alpha \approx 0.6662$，而用数值积分求得的面积是 0.32391，与 $\frac{2}{3}\tan^3\alpha$ 吻合。
- 当 $b \to 0$ 时，$\alpha \to 0$，区域缩小至消失，与公式的预测一致。

常见错误

- 在 x 轴处把区域分开，却忘记了 x 轴下方的三角形。在切线与曲线之间取单一个积分，便能一次过处理两部分。
- 用错了棒的一端：带 $+b\cos\theta$ 的那一端永远不会到达 y 轴。
- 答案中留下了 b，而没有利用 $b\cos\alpha = 2\tan\alpha$ 把它消去。

STEP 之外

中点描出抛物线，而每一端则描出一条沿切线方向保持固定距离 b 的曲线。由旧曲线的切线构造新曲线，是平面曲线微分几何（differential geometry）的一个常见主题（渐伸线（involute）、包络线（envelope）和曳物线（tractrix）都是经典例子），大学一年级课程中会与弧长（arc length）和曲率（curvature）一并学到。这个面积的简洁答案令人想起阿基米德（Archimedes）对抛物线的求积：他证明了抛物线弓形的面积是某个内接三角形面积的 $\frac{4}{3}$ 倍。如想做更多同类题目，可参考 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。