详细解答

STEP I 2015，第 3 题

纯数学 · 坐标几何中的可见性

STEP I 2015，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

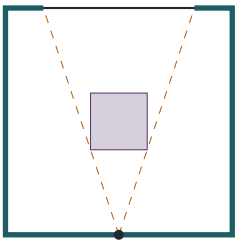
step.maths.org/questions/15-s1-q3

关键思路

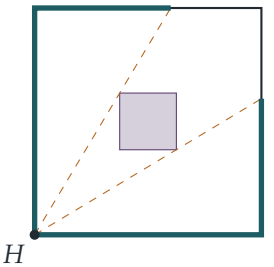
守卫的视线会被建筑物挡住；由于建筑物是一个凸（convex）正方形，刚好擦过建筑物某个角的直线，就标示出墙上可见部分的终点。因此，对每个位置，我们画出这些擦角线，找出它们与周界（perimeter）的交点，再把可见的长度加起来。所有工作都靠相似三角形（similar triangles）（或直线方程）完成。数值 $3a$ 的出现，是因为当 b 取这个值时，从墙中点出发的擦角线刚好到达庭院的一个角。

解答

把原点放在中心，于是周界墙是边在 $x = \pm\frac{b}{2}$、$y = \pm\frac{b}{2}$ 上的正方形，而建筑物是正方形 $|x| \le \frac{a}{2}$、$|y| \le \frac{a}{2}$，其中 $0 < a < b$。周界的总长度是 $4b$。守卫能看见墙上的点 Q，当且仅当由守卫到 Q 的线段不穿过建筑物。



墙的中点（$b > 3a$）



角落

墙上加粗（青色）的部分是守卫能看见的部分；虚线擦过建筑物的角。

守卫在墙的中点

设守卫在 $G = (0, -\frac{b}{2})$，即底墙的中点。整幅底墙都可见，因为建筑物严格位于它的上方：长度为 b。由于图形关于 y 轴对称（symmetry），我们只需看右边。

一条向右上方的视线不碰到建筑物，当且仅当它从最接近它的角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ 的右边经过。（这条直线先遇到 $y = -\frac{a}{2}$，而且它的 x 坐标随高度上升而增加；所以如果它在高度 $-\frac{a}{2}$ 处位于建筑物右边，就会一直留在右边；如果它在该处位于 K 的左边，它便会进入建筑物，因为在高度 $-\frac{a}{2}$ 处它的 x 坐标介乎 0 与 $\frac{a}{2}$ 之间。）因此 G 所见范围的边界是直线 GK，它在水平距离 $\frac{a}{2}$ 内上升 $\frac{b-a}{2}$，所以斜率（gradient）是 $\frac{b-a}{a}$。

这条直线在以下高度与右墙 $x = \frac{b}{2}$ 相交：

$$y_1 = -\frac{b}{2} + \frac{b}{2} \cdot \frac{b-a}{a} = -\frac{b}{2} + \frac{b(b-a)}{2a}.$$

它到达该墙顶端（$y_1 \geq \frac{b}{2}$）当且仅当 $\frac{b-a}{a} \geq 2$，即 $b \geq 3a$。

> **想一想** 为甚么 b 与 $3a$ 的比较会在这里出现？

它决定擦角线 GK 撞上哪一幅墙：若 $b < 3a$，撞上右墙；若 $b > 3a$，则撞上远端（顶部）的墙。两种情况给出不同的可见长度公式。

*情况 $b < 3a$。*守卫看见右墙从底角至高度 y_1 的部分，长度为

$$y_1 + \frac{b}{2} = \frac{b(b-a)}{2a},$$

此外便看不见其他部分（任何连向该墙更高点或顶墙的直线，都从 K 的左边经过）。加上左边对应的一段，总可见长度为

$$M = b + 2 \cdot \frac{b(b-a)}{2a} = b + \frac{b(b-a)}{a} = \frac{b^2}{a}.$$

*情况 $b > 3a$。*这时整幅右墙（长度 b）都可见，而直线 GK 上升 b 后与顶墙 $y = \frac{b}{2}$ 相交，交点为

$$x = \frac{a}{b-a} \cdot b = \frac{ab}{b-a},$$

由于 $2a < b - a$，这个值小于 $\frac{b}{2}$。守卫看见顶墙由该点至角落的部分，长度为 $\frac{b}{2} - \frac{ab}{b-a} = \frac{b(b-3a)}{2(b-a)}$。把底墙、两幅侧墙和顶墙的两段加起来：

$$M = 3b + \frac{b(b-3a)}{b-a} = \frac{3b(b-a) + b(b-3a)}{b-a} = \frac{b(4b-6a)}{b-a}.$$

守卫在角落

设守卫在 $H = (-\frac{b}{2}, -\frac{b}{2})$。经过 H 的两幅墙完全可见：长度为 $2b$。图形关于对角线 $y = x$ 对称，所以只看右墙。按照与前面相同的论证，可见部分由经过 H 与角 $K = (\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$ 的

直线截断，其斜率为

$$\frac{\frac{b}{2}-\frac{a}{2}}{\frac{b}{2}+\frac{a}{2}}=\frac{b-a}{b+a}.$$

在到达墙 $x=\frac{b}{2}$ 的水平距离 b 内，它上升 $\frac{b(b-a)}{a+b}$，这个值小于 b，所以无论 a 和 b 取甚么值，这条直线总是撞上右墙。守卫看见右墙长度 $\frac{b(b-a)}{a+b}$ 的部分，顶墙亦看见同样长度，两幅墙的其余部分都看不见。因此

$$C=2b+\frac{2b(b-a)}{a+b}=\frac{2b(a+b)+2b(b-a)}{a+b}=\frac{4b^2}{a+b}.$$

比较两个位置

情况 $b<3a$。

$$C-M=\frac{4b^2}{a+b}-\frac{b^2}{a}=\frac{b^2(4a-(a+b))}{a(a+b)}=\frac{b^2(3a-b)}{a(a+b)}>0,$$

所以**角落**较佳。

情况 $b>3a$。

$$M-C=\frac{b(4b-6a)}{b-a}-\frac{4b^2}{a+b}=\frac{b[(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)]}{(b-a)(a+b)}=\frac{2ab(b-3a)}{(b-a)(a+b)}>0,$$

因为 $(4b-6a)(a+b)-4b(b-a)=4b^2-2ab-6a^2-4b^2+4ab=2ab-6a^2$。所以**墙的中点**较佳。

当 $b=3a$ 时，M 的两条公式都给出 $9a$，而 $C=\frac{36a^2}{4a}=9a$ 亦然，所以两个位置一样好。

验算

- 取 $a=1$、$b=2$：$M=4$，$C=\frac{16}{3}\approx 5.33$，所以角落胜出。取 $a=1$、$b=5$：$M=\frac{5\cdot 14}{4}=17.5$，$C=\frac{100}{6}\approx 16.67$，所以中点胜出。这些数值已由电脑验算证实，该验算测试了通往墙上数千个点的视线。
- 若 $b\to a$，建筑物填满整个庭院：$M\to a$（只有守卫所在的墙）而 $C\to 2a$（在角落相交的两幅墙），正如预期。
- 当 $b\to\infty$ 时，建筑物变得微不足道：$M=\frac{b(4b-6a)}{b-a}$ 与 $C=\frac{4b^2}{a+b}$ 都趋近整个周界 $4b$，而且都一直小于它。

常见错误

- 忘记当 $b>3a$ 时，在墙中点的守卫除了两幅侧墙，还能看见对面墙的一部分。

- 擦错建筑物的角：从下方看，起作用的是底部的两个角 $(\pm\frac{a}{2}, -\frac{a}{2})$。
- 总长度中漏掉守卫自己所在的墙（或两幅墙）。

STEP 之外

关于从某点能看见区域哪些部分的问题，属于计算几何（computational geometry）的范畴：经典的“美术馆定理”（art gallery theorem）指出，要监看一个有 n 幅墙的多边形展览馆的每一点，$\lfloor n/3 \rfloor$ 名守卫总是足够，而有时亦确实需要这么多。像这里那样求出可见区域（visibility region），是这类问题的基本步骤；在电脑图形学中亦然，隐藏面消除（hidden-surface removal）就是以同样方式运作。如想做更多这类风格的题目，Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《数学高阶问题》）是很好的下一步。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。