详细解答

STEP I 2015，第 2 题

纯数学 · 三次方程的三角解法

> **STEP I 2015，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q2

关键思路

三次式（cubic）$4x^3 - 3x$ 正正就是三倍角公式（triple-angle formula）所给出的形式：$\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$。因此，这种形式的三次方程可以通过猜一个余弦值来求解。一旦知道其中一个根（root），便可以因式分解（factorise），再解余下的二次方程（quadratic）。在最后一部分，代换 $y = 2x$ 把题目给出的三次方程化成这种形式，而第 (i) 部分则提供了我们所需的准确值。

解答

第 (i) 部分

把 $15^\circ = 45^\circ - 30^\circ$ 写出，并使用复角公式（compound-angle formulae）：

$$\cos 15^\circ = \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}},$$

此即所求。同样地，

$$\sin 15^\circ = \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}.$$

把分母有理化（rationalising the denominator）后，得到等价的形式

$$\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}, \qquad \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4},$$

这两个形式在第 (iii) 部分会更方便使用。

第 (ii) 部分

设 $c = \cos\alpha$ 及 $s = \sin\alpha$。展开 $\cos(2\alpha + \alpha)$，

$$\begin{aligned}\cos 3\alpha &= \cos 2\alpha \cos\alpha - \sin 2\alpha \sin\alpha \\ &= (2c^2 - 1)c - 2s^2 c \\ &= 2c^3 - c - 2(1 - c^2)c \\ &= 4c^3 - 3c.\end{aligned}$$

所以 $4c^3 - 3c - \cos 3\alpha = 0$：$x = \cos\alpha$ 是一个根。

至于其余的根，把 $\cos 3\alpha$ 换成 $4c^3 - 3c$，然后因式分解：

$$\begin{aligned}4x^3 - 3x - (4c^3 - 3c) &= 4(x^3 - c^3) - 3(x - c) \\ &= (x - c)(4x^2 + 4cx + 4c^2 - 3).\end{aligned}$$

? **想一想** 该如何化简这个二次因式的判别式?

利用 $c^2 + s^2 = 1$，判别式（discriminant）为 $16c^2 - 16(4c^2 - 3) = 48(1 - c^2) = 48s^2$。它的平方根是 $4\sqrt{3}\,|s|$，但由于我们同时取 $\pm$ 两个符号，所以可以略去绝对值。二次公式（quadratic formula）给出

$$x = \frac{-4c \pm 4\sqrt{3}\,s}{8},$$

因此另外两个根是

$$x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha \quad 及 \quad x = -\tfrac{1}{2}\cos\alpha - \tfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\alpha.$$

它们就是 $\cos(\alpha - 120°)$ 和 $\cos(\alpha + 120°)$。这是合理的：$3(\alpha \pm 120°) = 3\alpha \pm 360°$，所以这两个角的 $\cos 3\theta$ 与 α 的相同。

第 (iii) 部分

? **想一想** 题目给出的三次式是 $y^3 - 3y - \sqrt{2}$，而不是 $4x^3 - 3x - \cdots$。该如何把两者配合起来?

我们希望三次项与一次项的系数（coefficient）之比为 4 比 3，与第 (ii) 部分一样。设 $y = 2x$：

$$8x^3 - 6x - \sqrt{2} = 0 \iff 4x^3 - 3x - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

这正是第 (ii) 部分的方程，其中 $\cos 3\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos 45°$，所以可以取 $\alpha = 15°$。第 (ii) 部分于是给出三个根 x。它们互不相同（见下文），因此就是这个三次方程的全部根，而由

$y = 2x$ 得

$$y = 2\cos\alpha, \qquad y = -\cos\alpha \pm \sqrt{3}\sin\alpha, \qquad \alpha = 15^\circ.$$

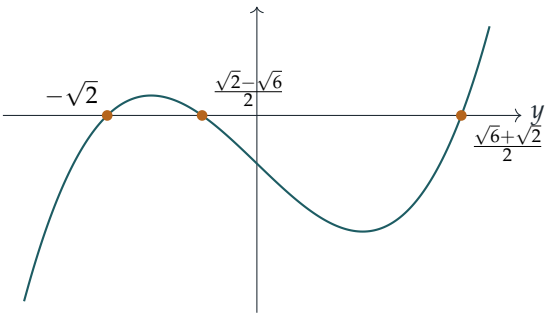
现在代入第 (i) 部分的值。

- $y = 2\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ + \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})+(\sqrt{18}-\sqrt{6})}{4}$，化简后得 $\dfrac{2\sqrt{2}-2\sqrt{6}}{4} = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$。
- $y = -\cos 15^\circ - \sqrt{3}\sin 15^\circ = \dfrac{-(\sqrt{6}+\sqrt{2})-(3\sqrt{2}-\sqrt{6})}{4} = -\sqrt{2}$。

这里用了 $\sqrt{3}\sqrt{6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$。这三个值显然互不相同。所以解为

$$y = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}, \qquad y = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}, \qquad y = -\sqrt{2}.$$

以角度表示，它们分别是 $2\cos 15^\circ$、$2\cos 255^\circ$ 及 $2\cos 135^\circ$。



验算

- $y^3 - 3y - \sqrt{2}$ 的 y^2 系数为零，所以各根之和必为零。的确，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2} - \sqrt{2} = 0$。
- 各根之积应为 $\sqrt{2}$。由于 $(\sqrt{2}+\sqrt{6})(\sqrt{2}-\sqrt{6}) = 2-6 = -4$，各根之积为 $(-1)\cdot(-\sqrt{2}) = \sqrt{2}$。
- 根 $y = -\sqrt{2}$ 很容易直接验证：$-2\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{2} = 0$。以数值计算，$\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2} \approx 1.93185$，而 $(1.93185)^3 - 3(1.93185) \approx 1.41421 = \sqrt{2}$。
- 在第 (ii) 部分中，$\alpha = 0$ 给出方程 $4x^3 - 3x - 1 = 0$，即 $(x-1)(2x+1)^2 = 0$。公式给出的根为 $1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$，与预期相符。

常见错误

- 在第 (iii) 部分忘记作伸缩代换，结果解了 $4x^3 - 3x - \sqrt{2} = 0$。这个方程需要 $\cos 3\alpha = \sqrt{2} > 1$，这是不可能的。
- 给出 x 的答案，而不是 $y = 2x$ 的答案。
- 写出 $\sqrt{3(1-c^2)} = \sqrt{3}\sin\alpha$，却没有指出 $\pm$ 号已照顾到 $\sin\alpha < 0$ 的情况。

STEP 之外

这是解有三个实根的三次方程的三角方法，归功于韦达（Viète）。任何三次方程都可以经平移消去平方项，得到 $t^3 + pt + q = 0$。当 $p < 0$ 时，伸缩代换 $t = 2\sqrt{-p/3}\,x$ 把它化成 $4x^3 - 3x = k$。在这种情况下，卡尔达诺（Cardano）公式帮不上忙，因为即使三个根全是实数，它也要经过负数的平方根。弄明白为何会这样，以及为何余弦技巧能避开这个问题，便会自然地引向复数（complex numbers）和单位根（roots of unity）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）对此给出了优美的几何图像。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。