详细解答

STEP I 2015，第 13 题

概率与统计 • 条件概率

STEP I 2015，第 13 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s1-q13

关键思路

以第一个 6 出现的时间作条件（conditioning）。若已知第一个 6 出现在第 n 次投掷，则之前的 $n-1$ 次投掷各自独立，且每次同样可能是 $1,\dots,5$ 中任何一个；于是关于第一个 6 之前出现的 4 和 5 的问题，就变成普通的二项分布（binomial distribution）问题。再对 n 求和，便得到几何级数（geometric series）及其导数，而这正是提示中二项展开式（binomial expansion）派上用场之处。

解答

各次投掷互相独立，每一面的概率均为 $\frac{1}{6}$。记第一个 6 出现在第 n 次投掷这事件为 A，并写 $p_n = \mathrm{P}(A)$。

第 (i) 部分

第一个 6 出现在第 n 次投掷，当且仅当第 $1,\dots,n-1$ 次投掷都不是 6，而第 n 次投掷是 6。由独立性，

$$\mathrm{P}(A) = p_n = \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}, \qquad n = 1,2,3,\dots$$

条件化的关键事实。 在 A 发生的条件下，对第 $1,\dots,n-1$ 次投掷，我们只知道它们“不是 6”。由于骰子公平而各次投掷独立，这 $n-1$ 次投掷互相独立，且每次都在 $\{1,2,3,4,5\}$ 上均匀分布。之后每一部分都会用到这一点，并配合全概率定律（law of total probability）$\mathrm{P}(X) = \sum_n \mathrm{P}(X \mid A)\, p_n$。

第 (ii) 部分

较容易的做法是求 $\mathrm{P}(B')$，即在第一个 6 之前没有出现 5 的概率。在 A 的条件下，之前 $n-1$ 次投掷每次避开 5 的概率为 $\frac{4}{5}$，所以

$$\mathrm{P}(B') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{2}{3}\right)^{n-1} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \tfrac{1}{2}.$$

因此 $\mathrm{P}(B) = \frac{1}{2}$。

第 (iii) 部分

由容斥原理（inclusion–exclusion principle）（以补集形式表示），

$$\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \mathrm{P}(B') - \mathrm{P}(C') + \mathrm{P}(B' \cap C').$$

由 4 和 5 两面之间的对称性，$\mathrm{P}(C') = \mathrm{P}(B') = \frac{1}{2}$。至于 $B' \cap C'$，在 A 的条件下，之前每次投掷都必须同时避开 4 和 5，概率为 $\frac{3}{5}$：

$$\mathrm{P}(B' \cap C') = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-1} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \tfrac{1}{3}.$$

所以 $\mathrm{P}(B \cap C) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$。

第 (iv) 部分

在 A 的条件下，之前 $n-1$ 次投掷中 5 的个数服从 $\mathrm{B}(n-1, \frac{1}{5})$，所以

$$\mathrm{P}(D \mid A) = (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \qquad (n \geq 2),$$

而当 $n = 1$ 时此概率为 0。因此

$$\mathrm{P}(D) = \sum_{n=2}^{\infty} (n-1)\tfrac{1}{5} \left(\tfrac{4}{5}\right)^{n-2} \left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1} \tfrac{1}{6}.$$

抽出一个因子 $\frac{5}{6}$，其余两两配对：$\frac{1}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$ 及 $\frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} = \frac{2}{3}$。设 $m = n - 1$，

$$\mathrm{P}(D) = \tfrac{1}{36} \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\tfrac{2}{3}\right)^{m-1} = \tfrac{1}{36} \left(1 - \tfrac{2}{3}\right)^{-2} = \tfrac{9}{36} = \tfrac{1}{4},$$

这里用了题目所给、指数为 -2 的展开式：$(1-x)^{-2} = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots$。

想一想 怎样才能求得 $\mathrm{P}(D \cup E)$，而无须逐一列出其中一个或两个事件同时发生的所有情况?

第 (v) 部分

利用 $\mathrm{P}(D\cup E)=\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(E)-\mathrm{P}(D\cap E)$，其中由 4 与 5 的对称性得 $\mathrm{P}(E)=\mathrm{P}(D)=\frac{1}{4}$。所以只需求 $\mathrm{P}(D\cap E)$。

在 A 的条件下，之前 $n-1$ 次投掷中恰有一个 4 和恰有一个 5，即要选定哪一次是 5、哪一次是 4（共 $(n-1)(n-2)$ 种有序选法），而其余 $n-3$ 次投掷全部落在 $\{1,2,3\}$ 中：

$$\mathrm{P}(D\cap E\mid A)=(n-1)(n-2)\left(\tfrac{1}{5}\right)^2\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\qquad(n\geq 3).$$

于是

$$\mathrm{P}(D\cap E)=\sum_{n=3}^{\infty}(n-1)(n-2)\tfrac{1}{25}\left(\tfrac{3}{5}\right)^{n-3}\left(\tfrac{5}{6}\right)^{n-1}\tfrac{1}{6}.$$

抽出 $\left(\frac{5}{6}\right)^2$，得常数 $\frac{1}{25}\cdot\frac{25}{36}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{216}$，并有 $\frac{3}{5}\cdot\frac{5}{6}=\frac{1}{2}$。设 $k=n-3$，

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(D\cap E)&=\tfrac{1}{216}\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)\left(\tfrac{1}{2}\right)^k=\tfrac{2}{216}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+2)!}{k!\,2!}\left(\tfrac{1}{2}\right)^k\\&=\tfrac{1}{108}\left(1-\tfrac{1}{2}\right)^{-3}=\tfrac{8}{108}=\tfrac{2}{27},\end{aligned}$$

这里用了题目所给、指数为 -3 的展开式，其 x^k 项的系数为 $\frac{(k+2)!}{k!\,2!}$。因此

$$\mathrm{P}(D\cup E)=\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}-\tfrac{2}{27}=\tfrac{27-4}{54}=\tfrac{23}{54}.$$

验算

有一个更巧妙的方法可以看出每一个答案，用来验算再好不过。把所有掷出 1、2、3 的投掷（以及在 (ii) 和 (iv) 中连 4 也一并）忽略掉：它们从不影响这些事件。余下的相关投掷组成一个序列，其中每个相关的面出现的机会均等。

- (ii)：第一次掷出 5 或 6 时，两者机会均等，所以 $\mathrm{P}(B)=\frac{1}{2}$。
- (iii)：在 4、5、6 三面之中，每一面同样可能是最后一个首次出现的，而 $B\cap C$ 正是说 6 最后出现，所以概率为 $\frac{1}{3}$。
- (iv)：D 表示由 5 和 6 组成的序列以 5, 6 开始：概率为 $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$。
- (v)：$D\cap E$ 表示由 4、5、6 组成的序列以 4, 5, 6 或 5, 4, 6 开始：概率为 $2\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{2}{27}$。

全部五个答案亦已通过电脑模拟 3×10^5 个投掷序列加以确认，模拟得出 $\mathrm{P}(D\cup E)\approx 0.426$，而理论值为 $\frac{23}{54}\approx 0.4259$。

常见错误

- 把之前的投掷当作在全部六面上均匀分布：在 A 的条件下，它们不可能是 6，所以每次是 5 的概率为 $\frac{1}{5}$，而非 $\frac{1}{6}$。
- 在 (v) 中漏了因子 $(n-1)(n-2)$，或者用了 $\binom{n-1}{2}$，后者没有区分两次投掷中哪一次是 4。
- 在 (v) 中直接把 $\mathrm{P}(D)+\mathrm{P}(E)$ 相加，却没有减去重叠部分。

STEP 之外

像本题这样，以一个随机停时（stopping time）作条件再求和，正是全概率定律最实用的形式；而你遇到的级数，则是负二项分布（negative binomial distribution）的生成函数（generating function）。“忽略无关投掷”这个验算方法，体现了一个威力强大的想法：只在有相关事情发生的时刻观察一个过程，往往比原来的过程简单得多。Grimmett 和 Welsh 所著的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）对这两个想法都有深入发展。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。