详细解答

STEP I 2015，第 11 题

力学 · 摩擦力与力矩

STEP I 2015，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s1-q11

关键思路

圆柱体上的每一个法向反作用力（normal reaction）都沿半径方向作用，因此必定通过圆心。所以，对每个圆心取力矩（moments），重力和所有法向反作用力都会消去，只剩下摩擦力（friction）；而这些摩擦力与圆心的距离全部相同。这样第 (i) 部分几乎不费吹灰之力便可得出。至于第 (ii) 部分，先对每个圆柱体沿斜面方向分解力，再在题目中两条不等式所涉及的两个接触点应用摩擦定律。

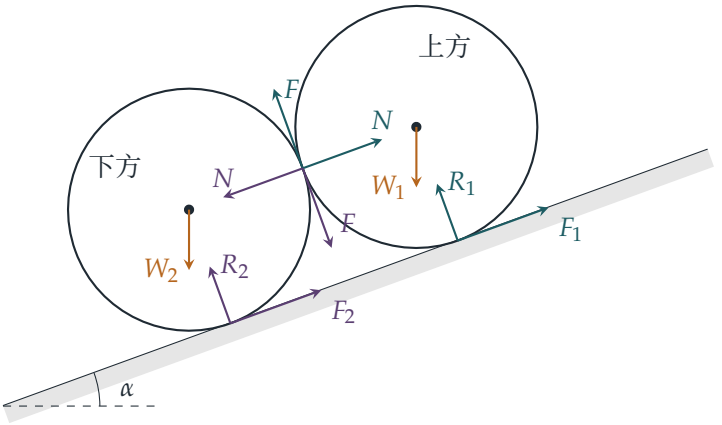
解答

我们把两个圆柱体视为半径同为 r 的均匀刚体（rigid body）圆柱，两者都与斜面接触，而上方的圆柱体位于斜面较高的位置。由于两者半径相等，连接两圆心的直线与斜面平行，所以两个圆柱体的接触点位于斜面上方高度 r 处，与两个圆心同高。两圆柱体之间的法向力沿圆心连线（与斜面平行）作用，而它们之间的摩擦力则垂直于斜面。

取 x 方向为沿斜面向上，y 方向为垂直于斜面并指离斜面。设

- R_1、R_2 为斜面对上方及下方圆柱体的法向反作用力；
- F_1、F_2 为斜面对上方及下方圆柱体的摩擦力，以沿斜面向上为正（我们容许它们带正负号，负值即表示沿斜面向下）；
- N 为下方圆柱体对上方圆柱体的法向力，方向沿斜面向上；
- F 为下方圆柱体对上方圆柱体的摩擦力，以指离斜面为正（同样带正负号）。

根据牛顿（Newton）第三定律，上方圆柱体对下方圆柱体施加沿斜面向下的力 N，以及指向斜面的力 F。



作用于上方圆柱体的力以蓝绿色表示，作用于下方圆柱体的力则以紫红色表示。

第 (i) 部分

对上方圆柱体的圆心取力矩。其重力作用于圆心，而 R_1 和 N 都沿半径作用，所以这些力全都没有力矩。剩下的只有两个摩擦力，各自沿切线方向作用，与圆心的距离均为 r：

- F_1 在圆柱体最低点沿斜面向上作用，产生（按图中方向）逆时针的力矩 rF_1；
- F 在接触点指离斜面作用，而该接触点位于圆心靠斜面下方的一侧，产生顺时针的力矩 rF。

要达至平衡（equilibrium），两者必须互相抵消，所以 $rF_1 = rF$，即 $F_1 = F$。

> ? **想一想** 为甚么对圆心取力矩时可以不理会法向反作用力?

圆上的法向反作用力垂直于接触点的切线，因此沿半径方向，其作用线通过圆心，对圆心的力矩为零。正正因为这样，在这里对圆心取力矩才是正确的选择。

同理，对下方圆柱体而言，只有 F_2（在其最低点沿斜面向上，产生逆时针力矩 rF_2）以及在接触点指向斜面的摩擦力 F（该接触点位于其圆心靠斜面上方的一侧，产生顺时针力矩 rF）有力矩。所以 $F_2 = F$。

因此作为带正负号的量，$F = F_1 = F_2$；特别地，它们的大小相等，得证。

第 (ii) 部分

对每个圆柱体沿平行于斜面的方向分解力：

$$\begin{aligned} \text{上方：} &\quad F_1 + N = W_1 \sin\alpha, \\ \text{下方：} &\quad F_2 = N + W_2 \sin\alpha. \end{aligned}$$

两式相加，并利用 $F_1 = F_2 = F$，得

$$2F = (W_1 + W_2)\sin\alpha, \qquad \text{所以} \qquad F = \tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha > 0,$$

这亦说明每个摩擦力的方向都与我们图中所画的一致。代回原式，

$$N = W_1 \sin\alpha - F = \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha,$$

由于 $W_1 > W_2$ 且 $\alpha > 0$，这是正数，所以两个圆柱体确实互相压着。对上方圆柱体沿垂直于斜面的方向分解力，

$$R_1 + F = W_1 \cos\alpha, \qquad \text{所以} \qquad R_1 = W_1 \cos\alpha - F.$$

想一想 我们实际上需要哪些摩擦不等式?

在平衡状态下，每个接触点的摩擦力最多只能是摩擦系数（coefficient of friction）乘以该处的法向反作用力。第一个结果来自两个圆柱体之间的接触点，第二个结果则来自上方圆柱体与斜面之间的接触点。（下方的接触点会给出涉及 μ_2 的第三个条件，但题目没有要求。）

两个圆柱体之间。我们需要 $F \le \mu N$:

$$\tfrac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha \le \mu \cdot \tfrac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha.$$

除以正数 $\frac{1}{2}(W_1 - W_2)\sin\alpha$，得

$$\mu \ge \frac{W_1 + W_2}{W_1 - W_2},$$

得证。

上方圆柱体与斜面之间。我们需要 $F \le \mu_1 R_1 = \mu_1(W_1\cos\alpha - F)$，即

$$(1+\mu_1)F \le \mu_1 W_1 \cos\alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \tfrac{1}{2}(1+\mu_1)(W_1+W_2)\sin\alpha \le \mu_1 W_1 \cos\alpha.$$

斜面的倾角满足 $0 < \alpha < \frac{1}{2}\pi$，所以 $\cos\alpha > 0$，而且 $(1+\mu_1)(W_1+W_2) > 0$。两者同时除去，得

$$\tan\alpha \le \frac{2\mu_1 W_1}{(1+\mu_1)(W_1+W_2)},$$

得证。（注意由于 $\mu_1 R_1 \ge F > 0$，这亦迫使 $R_1 > 0$，所以上方圆柱体会一直留在斜面上。）

验算

- 取 $W_1 = 3$、$W_2 = 1$，我们需要 $\mu \ge 2$；若再取 $\mu_1 = 1$，则需要 $\tan\alpha \le \frac{3}{4}$。把这类数值代入六条平衡方程（每个圆柱体两条分解方程和一条力矩方程）并直接求解，所得的 F、N 和 R_1 与上面的结果相同。

- 当 $W_1 \to W_2$ 时，μ 的下界趋向无穷大。这是合理的：此时 $N \to 0$，两个圆柱体几乎没有互相压着，但它们之间的摩擦力仍然必须是 $\frac{1}{2}(W_1 + W_2)\sin\alpha$。
- 当 $\mu_1 \to \infty$ 时，该上界变成 $\tan\alpha \leq 2W_1/(W_1 + W_2)$，这正正就是条件 $R_1 \geq 0$：一旦上方圆柱体开始离开斜面，即使斜面完全粗糙也无补于事。

常见错误

- 以为两个圆柱体之间的摩擦力沿斜面方向作用。其实它沿接触点的公切线作用，而在这里公切线垂直于斜面。
- 忘记力矩方程。单靠分解力只得出四条方程，却有六个未知数；确定摩擦力的正是那两条力矩方程。
- 计算法向反作用力 R_1 时漏掉 F。下方圆柱体的摩擦力把上方圆柱体推离斜面，所以 R_1 小于 $W_1\cos\alpha$。

STEP 之外

刚体处于平衡，当且仅当合力和合力矩同时为零；而巧妙地选择取力矩的点，是刚体静力学（rigid-body statics）的主要技巧。在这题中，方程的数目恰好等于未知数的数目；若未知数比方程多，问题便是*超静定*（statically indeterminate）的，必须为物体如何变形建立模型才能完成求解。Kleppner 和 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对刚体静力学和力矩有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。