详细解答

STEP I 2015，第 10 题

力学 · 相对速度

> **STEP I 2015，第 10 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/15-s1-q10

关键思路

雨点打在一个表面上，是一种通量（flux）：单位时间内打中的雨量 =（单位体积内的雨点数目）×（面积）×（雨的速度垂直于该表面的分量）。巴士行驶时，改在巴士的参考系（frame of reference）中考虑，这样只有雨速的水平分量会改变。然后，就整段行程而言，把速率乘以行程时间 D/u，再对 u 求最小值。绝对值（modulus）把问题分成两种情况，视乎巴士比雨的水平运动慢还是快。

解答

雨打中巴士的速率

把雨模拟成均匀分布于空气中的雨点，每单位体积有 n 点，全部以相同速度运动。设巴士的阔度为 b，并取北方为水平正方向。雨从南方吹来，即向北移动，所以其速度为

$$\text{水平分量} v\cos\theta\text{（向北）}, \qquad \text{铅直分量} v\sin\theta\text{（向下）}.$$

雨没有东西方向的分量，所以巴士两条长边的侧面保持干爽。

$u = 0$ 的情况。在时间 δt 内，打中车顶的雨点，就是位于一个以车顶为底、铅直高度为 $v\sin\theta\,\delta t$ 的斜棱柱（prism）之内的雨点，其体积为 $ab\,v\sin\theta\,\delta t$。打中车尾（南面，面积 hb）的雨点，则填满车尾后方一个水平深度为 $v\cos\theta\,\delta t$ 的棱柱。面向北方的车头则被遮挡。因此速率为

$$nb\,(h\,v\cos\theta + a\,v\sin\theta).$$

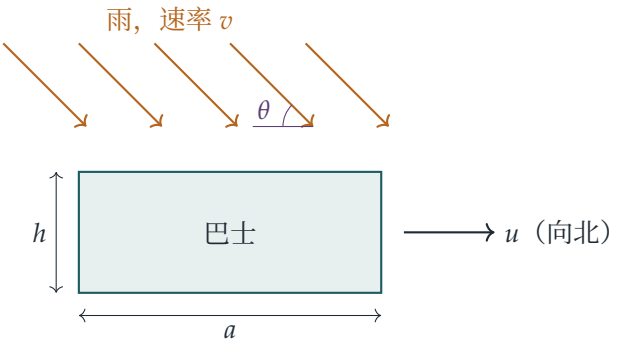
$u > 0$ 的情况。在以等速运动的巴士参考系中，雨的速度为

$$(v\cos\theta - u)\text{ 向北}, \qquad v\sin\theta\text{ 向下}.$$

巴士在这个参考系中静止，所以上述论证同样适用，只需把 $v\cos\theta$ 换成 $v\cos\theta - u$。铅直分量不变，所以车顶收集雨水的速率仍是 $nab\,v\sin\theta$。若 $v\cos\theta > u$，雨仍会追过巴士，以速率 $nhb\,(v\cos\theta - u)$ 打中车尾。若 $v\cos\theta < u$，则巴士迎头撞向雨，雨改为以速率 $nhb\,(u - v\cos\theta)$ 打中车头。无论哪种情况，总速率均为

$$nb\Big(h\,|v\cos\theta - u| + a\,v\sin\theta\Big),$$

与 $h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta$ 成正比，正如所求。



选择车速

设行程长度为 D，所需时间为 D/u，所以收集到的总雨量与下式成正比：

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h|v\cos\theta - u| + av\sin\theta\Big), \qquad 0 < u \le w.$$

记 $c = v\cos\theta$，并去掉绝对值符号。

若 $u \le c$：

$$R(u) = D\left(\frac{hv\cos\theta + av\sin\theta}{u} - h\right).$$

分子为正，所以 R 在 $0 < u \le c$ 上严格递减（strictly decreasing）。

若 $u \ge c$：

$$R(u) = D\left(h + \frac{v\,(a\sin\theta - h\cos\theta)}{u}\right).$$

它是递增还是递减，只取决于 $a\sin\theta - h\cos\theta$ 的正负号。

想一想 为甚么开得越快不一定越好?

开快一点会缩短行程，这对车顶总是有利：车顶所占的份额是 $Dav\sin\theta/u$。可是一旦 $u > c$，巴士便迎头撞向雨，而车头所占的份额 $Dh(u - c)/u$ 会随 u 增大。$a\sin\theta - h\cos\theta$ 的正负号告诉我们哪个效应占上风。

两条公式在 $u = c$ 时相等，所以 R 是连续（continuous）的。现在：

- 若 $w < v\cos\theta$，则所有容许的车速都满足 $u \le c$，而 R 在此递减，所以最佳选择是 $u = w$。
- 若 $a\sin\theta > h\cos\theta$，则 R 在 $u \le c$ 上递减，在 $u \ge c$ 上亦递减。所以 R 在整个 $(0, w]$ 上递减，最佳选择同样是 $u = w$。

这就证明了第一个结论。

若 $w > v\cos\theta$ 且 $a\sin\theta < h\cos\theta$： R 在 $(0, c]$ 上递减，在 $[c, w]$ 上严格递增。所以最小值出现在

$$u = v\cos\theta,$$

即刚好以雨的水平速率行驶。此时雨相对于巴士铅直落下，只有车顶会淋湿，总量为 $R(c) = Da\tan\theta$（以我们的单位计）。

若 $a\sin\theta = h\cos\theta$： 当 $u \ge c$ 时，$R(u) = Dh$，与 u 无关。若 $w \ge v\cos\theta$，则 $v\cos\theta$ 与 w 之间的任何车速都同样好，而低于 $v\cos\theta$ 的车速都较差。（若 $w < v\cos\theta$，则适用第一种情况，取 $u = w$。）从物理角度看，超过 $u = c$ 之后，开快一点在车顶省下的雨量，刚好等于车头多淋的雨量。这个条件即 $\tan\theta = h/a$：从路面看，雨沿着与巴士侧面一条对角线平行的方向落下。

回程

现在巴士向南行驶，迎着雨前进。按我们以北为正的约定，其速度为 $-u$，所以雨的相对水平速度为 $v\cos\theta + u > 0$，雨总是打中车头。总量与下式成正比：

$$R(u) = \frac{D}{u}\Big(h(v\cos\theta + u) + av\sin\theta\Big) = D\left(h + \frac{v\,(h\cos\theta + a\sin\theta)}{u}\right),$$

它对 u 严格递减。所以回程时，无论 a、h 和 θ 取甚么值，司机都应尽量开快，即 $u = w$。

验算

- 取 $a = 1.3$、$h = 0.8$、$v = 2$、$\theta = 0.6$ 及 $u = 0.7$，公式给出速率 2.229（以单位雨点密度及单位阔度计）。用电脑模拟随机分布的雨点穿过巴士截面，得出 2.232。在 $u = 0$、$u > v\cos\theta$ 以及 u 为负（回程）的情况下，吻合程度同样良好。
- 取 $\theta \to \frac{1}{2}\pi$（雨铅直落下）。此时 $a\sin\theta > h\cos\theta$，所以应全速行驶。这很合理：只有车顶会淋湿，在雨中的时间越短，淋到的雨就越少。
- 在 $\tan\theta = h/a$ 的相等情况下，总量 Dh 在 $u = v\cos\theta$、$1.5v\cos\theta$ 及 $3v\cos\theta$ 时都相同，与预测一致。

常见错误

- 求速率的最小值，而不是总量的最小值：必须把速率乘以行程时间 D/u。
- 忘记当 $u > v\cos\theta$ 时，雨打中的是车头而不是车尾。这正是需要绝对值的原因。
- 回程时再次使用 $|v\cos\theta - u|$；此时相对速率应为 $v\cos\theta + u$。

STEP 之外

“密度 $\times$ 面积 $\times$ 法向速度”这种计算，就是向量场（vector field）穿过一个曲面的通量。在向量微积分中，它成为曲面积分（surface integral）$\iint \rho\,\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$，这是流体力学和电磁学中守恒定律（conservation laws）的出发点。改用巴士的参考系，就是一次伽利略变换（Galilean transformation），它是相对论在经典力学中的先驱。Kleppner 与 Kolenkow 合著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）同时讨论了相对运动和这类通量论证。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。