详细解答

STEP I 2015，第 1 题

纯数学 · 曲线描绘

STEP I 2015，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/15-s1-q1

关键思路

能因式分解（factorise）的都先因式分解。这个二次式可以分解，所以零点（zeros）一目了然；而导数（derivative）同样是 e^x 乘以一个可分解的二次式，所以转向点（turning points）也一目了然。草图画对之后，要数“曲线 $= k$”有多少个解，只需把一条水平线上下移动，看它与曲线相交多少次。至于第 (ii) 部分，留意新函数其实就是把旧函数在 x^2 处取值，所以几乎所有结果都可以沿用。

解答

第 (i) 部分

设 $f(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) = e^x(2x - 1)(x - 2)$。

零点与正负号。由于 $e^x > 0$，$f(x) = 0$ 当且仅当 $x = \frac{1}{2}$ 或 $x = 2$。此外，f 在 $x < \frac{1}{2}$ 及 $x > 2$ 时为正，在 $(\frac{1}{2}, 2)$ 上为负。曲线与 y 轴相交于 $f(0) = 2$。

转向点。由乘积法则（product rule），

$$f'(x) = e^x(2x^2 - 5x + 2) + e^x(4x - 5) = e^x(2x^2 - x - 3) = e^x(2x - 3)(x + 1).$$

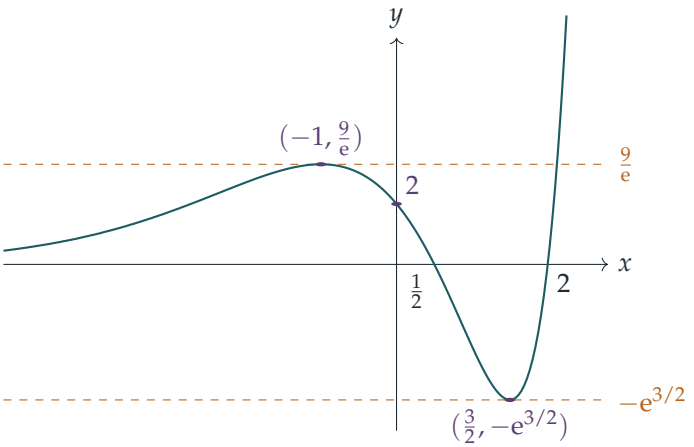
所以 $f'(x) = 0$ 于 $x = -1$ 及 $x = \frac{3}{2}$。f' 的正负号与 $(2x - 3)(x + 1)$ 相同：$x < -1$ 时为正，在 $(-1, \frac{3}{2})$ 上为负，$x > \frac{3}{2}$ 时为正。因此 f 先递增，后递减，再递增，并且

$$f(-1) = e^{-1}(2 + 5 + 2) = \frac{9}{e} \approx 3.31 \qquad \text{（局部极大值，local maximum），}$$

$$f(\tfrac{3}{2}) = e^{3/2}(\tfrac{9}{2} - \tfrac{15}{2} + 2) = -e^{3/2} \approx -4.48 \qquad \text{（局部极小值，local minimum）.}$$

两端的走势。当 $x \to \infty$ 时，两个因式都增大，所以 $f(x) \to \infty$。当 $x \to -\infty$ 时，由题目

给出的事实（取 $n = 2, 1, 0$）可知 $2x^2e^x$、$-5xe^x$ 及 $2e^x$ 各自趋于 0，所以 $f(x) \to 0$。由于 $f > 0$ 对 $x < \frac{1}{2}$ 成立，曲线从上方趋近负 x 轴：x 轴是一条渐近线（asymptote）。



数算 $f(x) = k$ 的解。解的数目就是水平线 $y = k$ 与曲线相交的次数。逐一考虑曲线的三段单调（monotonic）部分：

- 在 $(-\infty, -1]$ 上，f 严格递增，取遍 $(0, \frac{9}{e}]$ 中每个值恰好一次（它永远达不到 0）；
- 在 $[-1, \frac{3}{2}]$ 上，f 由 $\frac{9}{e}$ 严格递减至 $-e^{3/2}$，取遍其间每个值恰好一次；
- 在 $[\frac{3}{2}, \infty)$ 上，f 由 $-e^{3/2}$ 严格递增至 ∞，取遍每个值恰好一次。

把各段的贡献加起来（并小心不要把 $x = -1$ 或 $x = \frac{3}{2}$ 重复计算）：

$k < -e^{3/2}$	无解
$k = -e^{3/2}$	一个解（$x = \frac{3}{2}$）
$-e^{3/2} < k \leq 0$	两个解
$0 < k < \frac{9}{e}$	三个解
$k = \frac{9}{e}$	两个解（$x = -1$ 及一个 $x > 2$ 的解）
$k > \frac{9}{e}$	一个解

想一想 为甚么 $k = 0$ 时有两个解，而不是三个？

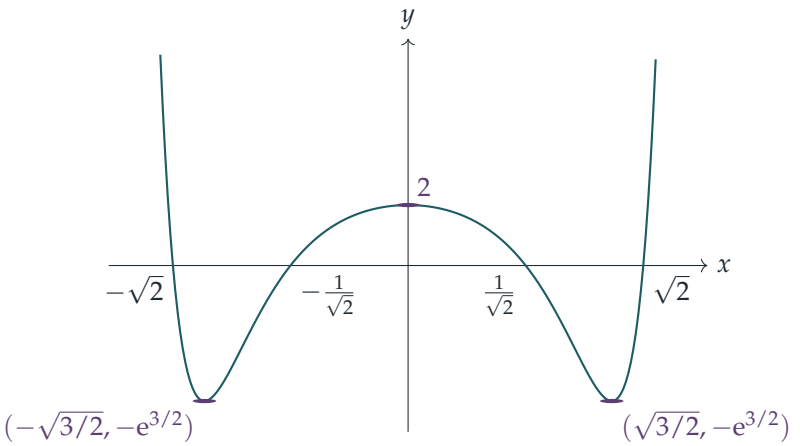
x 轴是左方的渐近线，而且对每个 $x < \frac{1}{2}$ 都有 $f(x) > 0$，所以最左边的分支永远不会真正到达 0。$f(x) = 0$ 的解只有 $x = \frac{1}{2}$ 和 $x = 2$。不过，对任何很小的 $k > 0$，左边的分支确实能到达高度 k，所以解的数目会跳升至三个。

第 (ii) 部分

设 $g(x) = \mathrm{e}^{x^2}(2x^4 - 5x^2 + 2)$。那么 $g(x) = f(x^2)$，所以 g 是偶函数（even function），其图像关于 y 轴对称。当 x 取遍 $[0, \infty)$ 时，$u = x^2$ 递增地取遍 $[0, \infty)$，所以对 $x \geq 0$，g 的图像只是重走 f 的图像中 $u \geq 0$ 的部分：

- $g(0) = f(0) = 2$；
- 零点在 $x^2 = \frac{1}{2}$ 或 $x^2 = 2$ 处，即 $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ 及 $x = \pm\sqrt{2}$；
- 由链式法则（chain rule），$g'(x) = 2x\,f'(x^2) = 2x\,\mathrm{e}^{x^2}(2x^2 - 3)(x^2 + 1)$，它只在 $x = 0$ 及 $x = \pm\sqrt{3/2}$ 处为零。（f 在 $u = -1$ 处的转向点消失了，因为 $x^2 = -1$ 没有实数解。）

当 $0 < x < \sqrt{3/2}$ 时，$g'(x) < 0$；当 $x > \sqrt{3/2}$ 时，$g'(x) > 0$。所以 $(0, 2)$ 是局部极大值点（由对称性，在 0 的左边附近 $g' > 0$），而 $x = \pm\sqrt{3/2}$ 是极小值点，极小值为 $f(\frac{3}{2}) = -\mathrm{e}^{3/2}$。最后，当 $x \to \pm\infty$ 时 $g(x) \to \infty$，而且由于因子 e^{x^2}，增长得非常快。曲线呈“W”形：



验算

- $f(-1) = 9/\mathrm{e} \approx 3.311$ 及 $f(1.5) = -\mathrm{e}^{1.5} \approx -4.482$；在附近几点计算 f 的值，可确认它们分别是极大值和极小值。
- 在 $x = 0$ 附近，$g(x) = f(x^2) \approx f(0) + f'(0)x^2 = 2 - 3x^2$，是一条开口向下的抛物线（parabola），确认了 $(0, 2)$ 是局部极大值点。
- 已用电脑对每个范围内的样本 k 值核实根的数目（例如 $k = 2$ 有三个根，$k = -1$ 有两个根）。

- $f(-40) \approx 1.4 \times 10^{-14}$：正数，而且极小，与渐近线的预测一致。

常见错误

- 忘记曲线在左方只是趋近 x 轴，因而在 $k = 0$ 时数出三个解。
- 漏掉边界情况 $k = \frac{9}{\mathrm{e}}$ 及 $k = -\mathrm{e}^{3/2}$；在这些情况下，水平线与曲线相切（tangent），两个解合而为一。
- 在第 (ii) 部分，保留了对应 $x^2 = -1$ 的转向点。

STEP 之外

上面的数解论证建基于介值定理（intermediate value theorem）加上严格单调性（strict monotonicity）：在区间上连续且严格递增的函数，会取遍两端值之间的每个值恰好一次。大学的数学分析课程会严谨地证明这些事实，以及题目容许你假设的极限 $x^n \mathrm{e}^x \to 0$。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）是一本非常易读的书，可以看看这些证明是怎样做的。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。