详细解答

STEP III 2014，第 9 题

力学 · 有阻力的抛体

> **STEP III 2014，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q9

关键思路

题目已给出位置，所以速度（velocity）只需求导一次便得到；要验证运动方程（equation of motion），只需把 $\mathbf{v}$ 和 $\dot{\mathbf{v}}$ 代入 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$。之后的一切都围绕分量（components）展开：$\mathbf{r}$ 的 $\mathbf{j}$ 分量决定 T，而 $\mathbf{v}$ 在时间 T 时两个分量之比给出 $\tan\beta$。最后的不等式乍看很繁复，但只要令 $x = kT$ 并消去分母，它便正好化简为提示中的 $\sinh x > x$。

解答

速度，以及验证运动

我们把物体视为质点（particle）。牛顿（Newton）第二定律（Newton's second law）给出 $m\dot{\mathbf{v}} = m\mathbf{g} - mk\mathbf{v}$，所以运动方程是

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{g} - k\mathbf{v},$$

而初始条件（initial conditions）是在 $t = 0$ 时 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{v} = \mathbf{u}$。

这里 $\mathbf{g}$ 和 $\mathbf{u}$ 都是常向量，所以我们把给定的 $\mathbf{r}$ 逐个系数求导：

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{k - k\mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,\mathbf{g} + \frac{k\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{u} = \frac{1 - \mathrm{e}^{-kt}}{k}\,\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kt}\,\mathbf{u}.$$

再求导一次得 $\dot{\mathbf{v}} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u}$。另一方面，

$$\mathbf{g} - k\mathbf{v} = \mathbf{g} - (1 - \mathrm{e}^{-kt})\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u} = \mathrm{e}^{-kt}\mathbf{g} - k\mathrm{e}^{-kt}\mathbf{u},$$

两者相同，所以运动方程成立。在 $t = 0$ 时 $\mathrm{e}^0 = 1$，所以 $\mathbf{r} = \frac{0-1+1}{k^2}\mathbf{g} + 0\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 及 $\mathbf{v} = 0\,\mathbf{g} + \mathbf{u} = \mathbf{u}$。两个初始条件都成立。

飞行时间

现在取 $\mathbf{u} = u\cos\alpha\,\mathbf{i} + u\sin\alpha\,\mathbf{j}$ 及 $\mathbf{g} = -g\,\mathbf{j}$。$\mathbf{r}$ 的 $\mathbf{j}$ 分量是

$$\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = -\frac{kt - 1 + \mathrm{e}^{-kt}}{k^2}\,g + \frac{1-\mathrm{e}^{-kt}}{k}\,u\sin\alpha.$$

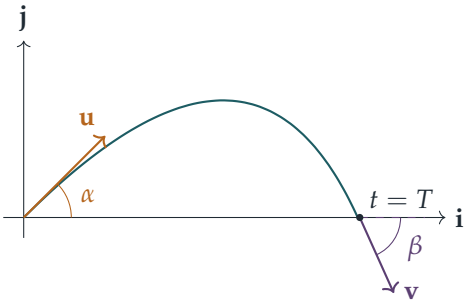
令它在 $t = T$ 时等于零，并乘以 k^2：

$$uk\sin\alpha\,(1-\mathrm{e}^{-kT}) = (kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT})g.$$

由于 $T > 0$ 及 $k > 0$，我们有 $1 - \mathrm{e}^{-kT} > 0$，所以可以除以它。把 $kT - 1 + \mathrm{e}^{-kT} = kT - (1 - \mathrm{e}^{-kT})$ 代入，得

$$uk\sin\alpha = \left(\frac{kT}{1-\mathrm{e}^{-kT}} - 1\right)g,$$

即所求。



时间 T 时的角度

在 $t = T$ 时，$\mathbf{v} = \frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\mathbf{g} + \mathrm{e}^{-kT}\mathbf{u}$ 的分量是

$$v_x = \mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha, \qquad v_y = -\frac{1-\mathrm{e}^{-kT}}{k}\,g + \mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha.$$

由于 $0 < \alpha < 90°$，所以 $v_x > 0$。我们预期 $v_y < 0$，因为质点正在下降，这一点稍后会证明。因此 $\mathbf{v}$ 与 $\mathbf{i}$ 之间的锐角（acute angle）满足 $\tan\beta = -v_y/v_x$。全式除以 v_x：

$$\tan\beta = \frac{(1-\mathrm{e}^{-kT})g}{k\,\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} - \frac{\mathrm{e}^{-kT}u\sin\alpha}{\mathrm{e}^{-kT}u\cos\alpha} = \frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} - \tan\alpha,$$

这里用了 $(1-\mathrm{e}^{-kT})/\mathrm{e}^{-kT} = \mathrm{e}^{kT} - 1$。

证明 $\tan\beta > \tan\alpha$

由上一个结果，$\tan\beta > \tan\alpha$ 等价于

$$\frac{(\mathrm{e}^{kT}-1)g}{uk\cos\alpha} > 2\tan\alpha \iff (\mathrm{e}^{kT}-1)g > 2uk\sin\alpha,$$

这是乘以 $uk\cos\alpha > 0$ 所得。现在用飞行时间的结果代替 $uk\sin\alpha$，这样 u 和 α 便完全消去。

想一想 怎样把它变成与 $\sinh kT$ 有关的式子?

令 $x = kT > 0$。那么 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} = \frac{x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1}$，除以 $g > 0$ 之后，所需的不等式变为

$$\mathrm{e}^{x} - 1 > \frac{2x\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}-1} - 2.$$

乘以 $\mathrm{e}^{x} - 1 > 0$（因此不等号方向不变）并展开：

$$\begin{aligned}
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 2\mathrm{e}^{x} + 1 > 2x\mathrm{e}^{x} - 2\mathrm{e}^{x} + 2 \\
&\iff \mathrm{e}^{2x} - 1 > 2x\mathrm{e}^{x} \\
&\iff \mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x} > 2x \qquad (\text{除以} \mathrm{e}^{x} > 0) \\
&\iff \sinh x > x.
\end{aligned}$$

每一步都可逆，而且当 $kT > 0$ 时 $\sinh kT > kT$（题目容许我们假设这一点）。所以 $\tan\beta > \tan\alpha$。

这也确定了 v_y 的正负：我们已证明 $-v_y/v_x > \tan\alpha > 0$ 且 $v_x > 0$，所以 $v_y < 0$。质点在时间 T 时确实正在下降，$\tan\beta$ 的公式因而成立。

最后，α 和 β 都在 $(0°, 90°)$ 之内，而 tan 在此区间上严格递增（strictly increasing）。所以由 $\tan\beta > \tan\alpha$ 得 $\beta > \alpha$。有阻力（resistance）时，质点落下的路径比上升时更陡。

验算

- 当 $k \to 0$ 时，利用 $\mathrm{e}^{-kt} \approx 1 - kt + \frac{1}{2}k^2t^2$，得 $\mathbf{r} \to \frac{1}{2}t^2\mathbf{g} + t\mathbf{u}$，这正是一般的抛射体（projectile）运动。此外，当 x 很小时 $\frac{x}{1-\mathrm{e}^{-x}} - 1 \approx \frac{x}{2}$，所以飞行时间的结果给出 $T \to 2u\sin\alpha/g$。同理 $\tan\beta \to \frac{gT}{u\cos\alpha} - \tan\alpha = \tan\alpha$，即对称的抛物线。
- 取 $k = 1\,\mathrm{s}^{-1}$、$g = 10\,\mathrm{m\,s}^{-2}$、$u = 10\,\mathrm{m\,s}^{-1}$ 及 $\alpha = 45°$。以数值方法解 $\mathbf{r}\cdot\mathbf{j} = 0$ 得 $T \approx 1.185\,\mathrm{s}$，比没有阻力时的 $1.414\,\mathrm{s}$ 短。落地角为 $\beta \approx 65.7° > 45°$，两条公式都吻合至小数点后很多位。用电脑对 $\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{g} - k\mathbf{v}$ 作逐步数值积分（numerical integration），也能重现给定的 $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$。

常见错误

- 取 $\tan\beta = v_y/v_x$ 而漏掉负号：落地时 v_y 是负数，而 β 是锐角。
- 除以或乘以 $1 - \mathrm{e}^{-kT}$ 或 $\mathrm{e}^{kT} - 1$ 时没有说明它是正数。正是这一点保证不等号方向正确。

► 停在 $\tan\beta > \tan\alpha$：要推出 $\beta > \alpha$，需要用到 tan 在锐角范围内递增这个事实。

STEP 之外

给定的 $\mathbf{r}$ 是线性微分方程（linear differential equation）$\ddot{\mathbf{r}} + k\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{g}$ 的解，你可以用积分因子（integrating factor）e^{kt} 直接解出它。线性阻力（linear drag）是唯一一种能使 $\mathbf{i}$ 方向与 $\mathbf{j}$ 方向的运动分离的阻力定律。若采用更贴近现实的二次阻力（quadratic drag）$-mk|\mathbf{v}|\mathbf{v}$，两个方向的运动便会耦合（coupled），而且不存在闭式解（closed form）。至于轨迹不对称、下降时较陡这一特点，在两种情况下都成立。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）正是以这种思路讨论受阻力作用的运动。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。