详细解答

STEP III 2014，第 8 题

纯数学 · 级数的收敛

> **STEP III 2014，第 8 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q8

本题在 *Beyond STEP* 第 2.3 节一个发散级数与它的收敛近亲中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch02/kempner.html

关键思路

把正整数切成一段段的区间 $[k^n, k^{n+1})$。每段中的每一项都介乎该段起点的值与下一段起点的值之间，所以每段之和都被夹在“项数乘以这两个值”之间。把各段加起来，一个难以处理的级数（series）便变成几何级数（geometric series），或者变成每段都贡献一个常数的级数，于是我们一眼就能看出它是否发散（diverges）。同样的计数方法也适用于不含数字 2 的整数，只要我们数清楚每段里有多少个这样的整数便可。

解答

分段不等式

区间 $k^n \le r \le k^{n+1} - 1$ 共包含

$$(k^{n+1} - 1) - k^n + 1 = k^{n+1} - k^n = k^n(k-1)$$

个整数。由于 f 是严格递减（strictly decreasing）的，对该段中的每个 r，

$$\mathrm{f}(k^{n+1}) < \mathrm{f}(r) \le \mathrm{f}(k^n),$$

第一个不等式成立是因为 $r < k^{n+1}$，第二个成立是因为 $r \geq k^n$（等号只在 $r = k^n$ 时成立）。把这些不等式对 r 的 $k^n(k-1)$ 个值相加，得

$$k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^{n+1}) \leq \sum_{r=k^n}^{k^{n+1}-1} \mathrm{f}(r) \leq k^n(k-1)\,\mathrm{f}(k^n),$$

即为所求。（事实上左边的不等式是严格的。）



$k = 2$ 时的各段，并标示每段的项数。

第 (i) 部分

取 $k = 2$ 及 $\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r}$，这是严格递减的。分段不等式变成

$$\frac{2^n}{2^{n+1}} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq \frac{2^n}{2^n}, \qquad \text{即} \qquad \frac{1}{2} \leq \sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r} \leq 1.$$

$n = 0, 1, \ldots, N$ 的各段恰好拼合起来覆盖 $1 \leq r \leq 2^{N+1} - 1$，因为每段都在下一段开始之前刚好结束。把这 $N+1$ 个不等式相加，

$$\frac{N+1}{2} \leq \sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r} \leq N+1.$$

至于推论：部分和（partial sums）$H_m = \sum_{r=1}^{m} \frac{1}{r}$ 随 m 递增，而 $H_{2^{N+1}-1} \geq \frac{N+1}{2}$，只要取 N 足够大，它便可以大于任何我们指定的数。因此部分和无上界，$\sum \frac{1}{r}$ 不收敛（converge）。

第 (ii) 部分

取 $k = 2$ 及 $\mathrm{f}(r) = \frac{1}{r^3}$，同样是严格递减的。这次我们只需要右边的不等式：

$$\sum_{r=2^n}^{2^{n+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \frac{2^n}{2^{3n}} = \frac{1}{4^n}.$$

如前对 $n = 0, 1, \ldots, N$ 相加，

$$\sum_{r=1}^{2^{N+1}-1} \frac{1}{r^3} \leq \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{4^n} < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}.$$

想一想 这只为部分的部分和给出了上界。为甚么它能为整个无穷级数给出上界？

所有项都是正数，所以部分和递增。任何部分和 $\sum_{r=1}^{m} r^{-3}$ 都不大于满足 $2^{N+1}-1 \geq m$ 的那个部分和，因此小于 $\frac{4}{3}$。一个有上界（bounded above）的递增数列必定收敛，而且其极限不大于该上界。因此

$$\sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{r^3} \leq \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3}.$$

第 (iii) 部分

计算 $S(1000)$ 的元素个数。把 0 至 999 的每个整数写成三位数字串，不足的在前面补零（例如 7 写成 007）。补上的零不会引入 2，所以一个整数不含 2，当且仅当其数字串不含 2。三个位置中每一位都可以是 $0,1,3,4,\ldots,9$ 这九个数字之一，共得 9^3 个数字串，各自对应不同的整数。其中一个是 000，它不是正数，所以 $S(1000)$ 含有 9^3-1 个数。

分段计数。以 $n+1$ 个位置作同样的论证，可知 $S(10^{n+1})$ 中有 $9^{n+1}-1$ 个整数。所以由 $(n+1)$ 位数组成的区间 $10^n \leq r \leq 10^{n+1}-1$ 含有

$$(9^{n+1}-1)-(9^n-1) = 8\cdot 9^n$$

个不含 2 的整数。（等价地说，首位数字不能是 0 或 2，所以有 8 个选择，其余 n 位各有 9 个选择。）

估计 $\sigma(n)$ 的上界。这就是 $k=10$ 的分段论证，只不过我们只计算不含 2 的整数。该段中每个 r 都满足 $\frac{1}{r} \leq \frac{1}{10^n}$，所以这一段对总和的贡献最多是

$$8\cdot 9^n \cdot \frac{1}{10^n} = 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^n.$$

现在固定 n，并选取 M 使得 $n \leq 10^{M+1}$。$S(n)$ 的每个元素都落在 $m=0,1,\ldots,M$ 的某一段之中，而且所有倒数都是正数。所以

$$\sigma(n) \leq \sum_{m=0}^{M} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m < \sum_{m=0}^{\infty} 8\left(\tfrac{9}{10}\right)^m = \frac{8}{1-\frac{9}{10}} = 80.$$

第二个不等式是严格的，因为我们略去了 $m>M$ 的正项。因此对所有 n，$\sigma(n)<80$。

验算

- 第 (ii) 部分：$\sum r^{-3} = 1.2020\ldots$（阿培里常数（Apéry's constant)），远低于 $1\frac{1}{3}$。
- 第 (i) 部分取 $N=2$：$\sum_{r=1}^{7} \frac{1}{r} \approx 2.593$，介乎 1.5 与 3 之间。
- 第 (iii) 部分：直接计数可证实 1000 以下有 $728 = 9^3-1$ 个数，而每段有 $8\cdot 9^n$ 个。用电脑直接求和得 $\sigma(10^7) \approx 10.28$，远低于 80。这个上界相当宽松，但题目要求的也就只是这么多。

常见错误

- 数错一段的项数。该段由 k^n 至 $k^{n+1}-1$，共 $k^{n+1}-k^n$ 项，而不是 $k^{n+1}-k^n-1$ 项。
- 在 (iii) 中把第 n 段的全部 9^n 个不含 2 的数字串都算进去。首位数字不能是 0，所以只有 $8\cdot 9^n$ 个。若用 9^{n+1}，所得上界是 90，并不足够。
- 在 (ii) 中只得出至 $2^{N+1}-1$ 为止的部分和的上界便停下，没有说明为甚么整个无穷级数也有上界。

STEP 之外

这就是柯西（Cauchy）凝聚判别法（Cauchy's condensation test）：对于递减的正数数列，$\sum a_r$ 收敛当且仅当 $\sum 2^n a_{2^n}$ 收敛。由此可立即看出 $\sum r^{-p}$ 收敛当且仅当 $p>1$。第 (iii) 部分是 Kempner 级数（Kempner series）：把所有含某个指定数字的整数删去，原本发散的调和级数（harmonic series）便变成收敛，因为几乎所有很大的整数都包含每一个数字。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对凝聚判别法及各种比较判别法（comparison tests）有细致的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。