详细解答

STEP III 2014，第 7 题

纯数学 · 向量与圆内接四边形

STEP III 2014，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

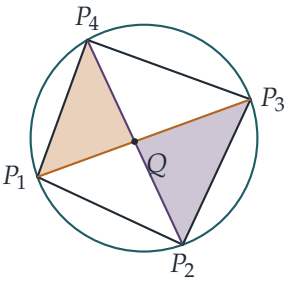
step.maths.org/questions/14-s3-q7

关键思路

第 (i) 部分是相交弦定理（intersecting chords theorem），源自同弓形内的圆周角相等（angles in the same segment）。向量部分则从另一途径再次得出同一事实。平面上的四点是“仿射相关”（affinely dependent）的，而该相关关系中的系数确定了两条对角线（diagonal）的交点位置，因此它们以已知比例分割每条对角线。把这些比例代入 (i)，便得出最终的关系式。

解答

整个解答都会用到这个构形的两个事实。第一，P_i 之中任何三点都不共线（collinear），因为一条直线与一个圆最多只相交于两点。第二，由于各顶点是沿圆周依次标记的，P_1 和 P_3 分别位于弦（chord）P_2P_4 所分出的两段不同的弧（arc）上。所以它们位于直线 P_2P_4 的两侧，而两条对角线相交于一点 Q，且 Q 严格位于线段 P_1P_3 和 P_2P_4 的内部。



第 (i) 部分

在三角形 P_1QP_4 和 P_2QP_3 中：

- $\angle P_1QP_4 = \angle P_2QP_3$，因为它们是在 Q 处的对顶角（vertically opposite angles）；
- $\angle QP_1P_4 = \angle P_3P_1P_4$ 及 $\angle QP_2P_3 = \angle P_4P_2P_3$。这两角相等，因为它们都是弦 P_3P_4 在同一段弧上的点 P_1、P_2 所对的角（该弧由 P_4 经 P_1 和 P_2 到 P_3）。

所以这两个三角形相似（similar），对应关系为 $P_1 \leftrightarrow P_2$、$Q \leftrightarrow Q$、$P_4 \leftrightarrow P_3$。对应边成比例：

$$\frac{P_1Q}{P_2Q} = \frac{QP_4}{QP_3}, \qquad \text{所以} \qquad (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4),$$

此即所求。

第 (ii) 部分

圆内接四边形(cyclic quadrilateral)位于一个平面上,所以三个向量 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$、$\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ 都位于一个二维空间中。二维空间中的三个向量必定线性相关（linearly dependent），所以存在不全为零的数 b_2, b_3, b_4，使得

$$b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0}.$$

（具体来说：由于 P_1, P_2, P_3 不共线，$\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1$ 与 $\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1$ 不平行，因此它们张成（span）整个平面，而 $\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1$ 是它们的线性组合。于是可取 $b_4 = -1$。）现设 $a_1 = -(b_2 + b_3 + b_4)$，并对 $i = 2, 3, 4$ 设 $a_i = b_i$。那么 $\sum a_i = 0$，各 a_i 不全为零，而且

$$\sum_{i=1}^{4} a_i\mathbf{p}_i = a_1\mathbf{p}_1 + b_2\mathbf{p}_2 + b_3\mathbf{p}_3 + b_4\mathbf{p}_4 = b_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) + b_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) + b_4(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1) = \mathbf{0},$$

所以 $(*)$ 成立。

第 (iii) 部分

$a_1 + a_3 \neq 0$。假设相反，即 $a_1 + a_3 = 0$。那么由 $(*)$ 的第一条方程，亦有 $a_2 + a_4 = 0$，所以 $a_3 = -a_1$ 及 $a_4 = -a_2$。第二条方程变成

$$a_1(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3) + a_2(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4) = \mathbf{0}.$$

直线 P_1P_3 与 P_2P_4 是不同的直线（否则四点全部共线），而且它们相交于 Q，所以两者不平行。因此 $\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_3$ 与 $\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_4$ 均非零且不平行，这迫使 $a_1 = a_2 = 0$。于是四个 a_i 全为零，产生矛盾。所以 $a_1 + a_3 \neq 0$，同理 $a_2 + a_4 = -(a_1 + a_3) \neq 0$。

交点。由 $(*)$ 得 $a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3 = -(a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4)$ 及 $a_1 + a_3 = -(a_2 + a_4)$。两式相除，

$$\mathbf{r} = \frac{a_1\mathbf{p}_1 + a_3\mathbf{p}_3}{a_1 + a_3} = \frac{a_2\mathbf{p}_2 + a_4\mathbf{p}_4}{a_2 + a_4}.$$

第一个形式显示 $\mathbf{r} = \mathbf{p}_1 + \dfrac{a_3}{a_1+a_3}(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)$，是直线 P_1P_3 上的一点。同样地，第二个形式显示它是直线 P_2P_4 上的一点。两条不平行的直线只相交于一点，所以 $\mathbf{r}$ 就是 Q 的位置向量（position vector）。

> **想一想** 怎样把这条 Q 的公式转化为长度 P_1Q 和 QP_3?

相减即可。利用 $\mathbf{q} = \mathbf{r}$,

$$\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 = \frac{a_3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1+a_3}, \qquad \mathbf{p}_3 - \mathbf{q} = \frac{a_1(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1)}{a_1+a_3}.$$

取长度得 $P_1Q = \dfrac{|a_3|}{|a_1+a_3|}P_1P_3$ 及 $QP_3 = \dfrac{|a_1|}{|a_1+a_3|}P_1P_3$。同样地，由 $\mathbf{r}$ 的第二个形式得 $P_2Q = \dfrac{|a_4|}{|a_2+a_4|}P_2P_4$ 及 $QP_4 = \dfrac{|a_2|}{|a_2+a_4|}P_2P_4$。

正负号。由于 Q 严格位于 P_1 与 P_3 之间，分数 $\frac{a_3}{a_1+a_3}$ 严格介乎 0 与 1 之间。于是 $\frac{a_1}{a_1+a_3} = 1 - \frac{a_3}{a_1+a_3}$ 亦严格介乎 0 与 1 之间。两个正数的积为正，所以

$$\frac{a_1a_3}{(a_1+a_3)^2} > 0, \qquad \text{即} a_1a_3 > 0.$$

对 P_2P_4 作同样的论证，得 $a_2a_4 > 0$。所以 $|a_1a_3| = a_1a_3$ 及 $|a_2a_4| = a_2a_4$。

推导结论。代入第 (i) 部分:

$$\frac{a_1a_3}{(a_1+a_3)^2}(P_1P_3)^2 = (P_1Q)(QP_3) = (P_2Q)(QP_4) = \frac{a_2a_4}{(a_2+a_4)^2}(P_2P_4)^2.$$

由于 $(a_2+a_4)^2 = (a_1+a_3)^2 \neq 0$，两边乘以它，得

$$a_1a_3(P_1P_3)^2 = a_2a_4(P_2P_4)^2,$$

此即所求结果。

验算

- 取顶点为 $(1,0),(0,1),(-1,0),(0,-1)$ 的正方形。那么 $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3 = \mathbf{0} = \mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_4$，所以 $a = (1,-1,1,-1)$ 满足 $(*)$。公式给出 Q 位于原点，且 $a_1a_3(P_1P_3)^2 = 4 = a_2a_4(P_2P_4)^2$。
- 对于不对称的情况，如图所示，取单位圆（unit circle）上角度为 $200°, 290°, 20°, 120°$ 的点 $P_1, \ldots, P_4$。(iii) 的全部三项结论，包括 $a_1a_3 > 0$ 和 $a_2a_4 > 0$，都已用电脑在这个例子及数以千计的随机圆内接四边形上验证，误差在 10^{-10} 以内。
- 把所有 a_i 乘以同一因子 λ 后，答案依然成立，这是理所当然的：最终关系式两边都乘以 λ^2。

常见错误

- 在 (i) 中配错了角：在 P_1 和 P_2 处的两个相等的角都是弦 P_3P_4 所对的角，这决定了哪些边互相对应。
- 在 (iii) 中未加说明便去掉绝对值（absolute value）符号。带绝对值的关系式很容易得出；真正的功夫在于证明 $a_1a_3 > 0$ 和 $a_2a_4 > 0$，这要用到 Q 位于两条对角线内部这一事实。
- 证明 $a_1 + a_3 \neq 0$ 时，忘记说明两条对角线为何不平行。

STEP 之外

量 $(P_1Q)(QP_3)$ 称为点 Q 关于该圆的幂（power）；对于通过 Q 的每一条弦，它的值都相同。第 (ii) 部分说的是平面上的四点是仿射相关的。数 a_i 是一种类似重心坐标（barycentric coordinates）的东西，而 Q 的公式让我们初步看到仿射几何（affine geometry）如何在不用任何坐标的情况下处理点、直线和比例。斯特朗（Strang）的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）讲解了线性相关，以及 (ii) 背后的维数计算。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。