详细解答

STEP III 2014，第 6 题

纯数学 · 以凸性证明不等式

> **STEP III 2014，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q6

关键思路

一个函数若在零点处取值为零、斜率（slope）也为零，而且图像向上弯曲，那么它必然升到零以上。把题目给出的事实积分两次，就能把这幅图像变成严谨的证明。之后题中每条不等式，都只需把所有项移到同一边，得出一个满足 $f(0) = f'(0) = 0$ 的函数 f，再验证 f'' 为正即可。真正要花心思的是选择恰当的整理方式，使 f'' 的形式简单。

解答

开首的结果

设对 $0 < t < x_0$ 有 $f''(t) > 0$，且 $f(0) = f'(0) = 0$。取定 x，使 $0 < x < x_0$。

取 $h = f''$。由于对 $0 < t < x$ 有 $f''(t) > 0$，由题目给出的结果得

$$f'(x) = f'(x) - f'(0) = \int_0^x f''(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

这对 $(0, x_0)$ 内每一个 x 都成立，所以对 $0 < t < x_0$ 有 $f'(t) > 0$。

现在再次应用题目给出的结果，这次取 $h = f'$。对 $0 < x < x_0$，我们有：对 $0 < t < x$，$f'(t) > 0$，所以

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t > 0.$$

因此对 $0 < t < x_0$ 有 $f(t) > 0$，得证。下文会一直以 $x_0 = \frac{1}{2}\pi$ 应用这个结果。

第 (i) 部分

设 $f(x) = 1 - \cos x \cosh x$。则 $f(0) = 1 - 1 = 0$，而由乘积法则（product rule）得

$$f'(x) = \sin x \cosh x - \cos x \sinh x, \qquad f'(0) = 0 - 0 = 0.$$

再求导一次，

$$\begin{aligned} f''(x) &= (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) \\ &= 2 \sin x \sinh x. \end{aligned}$$

当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时，$\sin x > 0$ 及 $\sinh x > 0$，所以 $f''(x) > 0$。由开首的结果，$f(x) > 0$，即

$$\cos x \cosh x < 1 \qquad \text{对} 0 < x < \tfrac{1}{2}\pi.$$

第 (ii) 部分

> ? **想一想** 应该把开首的结果应用到哪个函数上？直接用 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 看来会很繁复。

先消去分数。当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时，x、$\sin x$、$\sinh x$ 和 $\cosh x$ 全部为正，所以两边乘以正数不会改变不等号的方向。于是

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} \iff x < \sin x \cosh x, \qquad \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x} \iff \sin x \sinh x < x^2.$$

（第一条两边乘以 $x \cosh x > 0$，第二条两边乘以 $x \sinh x > 0$。）乘积 $\sin x \cosh x$ 和 $\sin x \sinh x$ 求导后形式整齐，这正是选用这个形式的原因。

左边的不等式。设 $g(x) = \sin x \cosh x - x$。则 $g(0) = 0$，且

$$g'(x) = \cos x \cosh x + \sin x \sinh x - 1, \qquad g'(0) = 1 + 0 - 1 = 0.$$

再求导一次，$\sin x \cosh x$ 项互相抵消：

$$\begin{aligned} g''(x) &= (-\sin x \cosh x + \cos x \sinh x) + (\cos x \sinh x + \sin x \cosh x) \\ &= 2 \cos x \sinh x, \end{aligned}$$

当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时它为正，因为在该区间内 $\cos x > 0$ 及 $\sinh x > 0$。（上限 $\frac{1}{2}\pi$ 正是在这里起作用。）由开首的结果，$g(x) > 0$，所以 $x < \sin x \cosh x$，从而 $\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x}$。

右边的不等式。设 $k(x) = x^2 - \sin x \sinh x$。则 $k(0) = 0$，且

$$k'(x) = 2x - \cos x \sinh x - \sin x \cosh x, \qquad k'(0) = 0.$$

再求导一次，$\sin x \sinh x$ 项互相抵消：

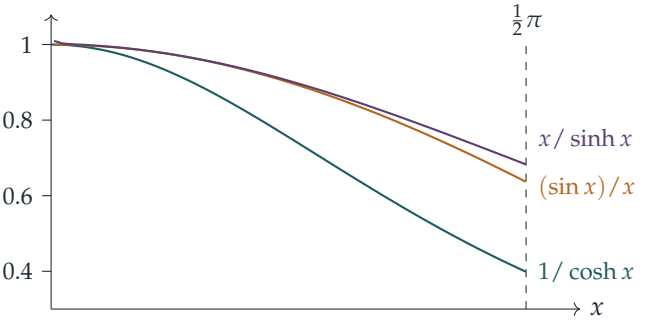
$$\begin{aligned} k''(x) &= 2 - (-\sin x \sinh x + \cos x \cosh x) - (\cos x \cosh x + \sin x \sinh x) \\ &= 2 - 2\cos x \cosh x. \end{aligned}$$

由第 (i) 部分，当 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$ 时 $\cos x \cosh x < 1$，所以在该区间内 $k''(x) > 0$。由开首的结果，$k(x) > 0$，所以 $\sin x \sinh x < x^2$，从而 $\frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x}$。

两者合起来，对 $0 < x < \frac{1}{2}\pi$，

$$\frac{1}{\cosh x} < \frac{\sin x}{x} < \frac{x}{\sinh x},$$

得证。



验算

- 级数（series）：$\cos x \cosh x = 1 - \frac{1}{6}x^4 + \cdots$，所以当 x 很小时它确实略低于 1，与 (i) 一致。同样，$\frac{1}{\cosh x} \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$、$\frac{\sin x}{x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$ 及 $\frac{x}{\sinh x} \approx 1 - \frac{1}{6}x^2$，所以 x 很小时左边的不等式显然成立，而右边的不等式则由下一项决定（$\frac{\sin x}{x}$ 的 x^4 系数是 $\frac{1}{120}$，而 $\frac{x}{\sinh x}$ 的则是较大的 $\frac{7}{360}$）。
- 在 $x = 1$：$\cos 1 \cosh 1 \approx 0.834 < 1$，且 $\frac{1}{\cosh 1} \approx 0.648 < \sin 1 \approx 0.841 < \frac{1}{\sinh 1} \approx 0.851$。
- 在 $x = \frac{1}{2}\pi$ 附近，取 $x = 1.57$：三个值约为 0.399、0.637 和 0.683，而 $\cos x \cosh x \approx 0.002$。

常见错误

- 直接把开首的结果应用到 $\frac{\sin x}{x} - \frac{1}{\cosh x}$ 本身：它在 0 处根本没有定义，而且其导数（derivative）十分难处理。应先消去分母，并检查每个乘上的因子都是正数。
- 只检查 $f(0) = 0$ 而忘记检查 $f'(0) = 0$；缺少后者，开首的结果便不适用。
- 没有察觉第二条不等式需要用到第 (i) 部分：$k'' = 2 - 2\cos x \cosh x$ 为正，正是因为 (i)。

STEP 之外

开首的结果其实是均值定理（mean value theorem）论证的一种形式：导数为正的函数是递增（increasing）的，这里用了两次。它说明凸函数（convex function）位于其切线（tangent line）之上，这里的切线就是原点处的 $y = 0$；而这种“比较二阶导数”的技巧，是证明初等函数之间不等式的标准方法。Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）对均值定理及其推论有细致的发展。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。