详细解答

STEP III 2014，第 5 题

纯数学 · 几何中的复数

> **STEP III 2014，第 5 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q5

关键思路

在复平面（complex plane）上，“平行且长度相等”其实就是“作为位移向量（displacement vector）相等”，而逆时针（anticlockwise）旋转四分之一圈就是乘以 i。因此，本题的每一个几何条件都可以化为关于顶点的一条简短线性方程。至于建在各边上的正方形，我们先走到该边的中点（midpoint），再沿垂直于该边的方向向外走半条边长，就得到正方形的中心。

解答

平行四边形的判别条件

首先设 $a+c=b+d$。那么

$$b-a=c-d \qquad \text{及} \qquad d-a=c-b,$$

所以位移 $\overrightarrow{AB}$ 等于 $\overrightarrow{DC}$，而 $\overrightarrow{AD}$ 等于 $\overrightarrow{BC}$。相等的位移互相平行且长度相等，故两组对边均平行且相等：$ABCD$ 是平行四边形（parallelogram）。

反之，设 $ABCD$ 是平行四边形。两条平行且等长的线段，其位移必定相等或相反，所以

$$b-a=\varepsilon(c-d), \qquad d-a=\eta(c-b), \qquad \varepsilon,\eta\in\{1,-1\}.$$

若 $\varepsilon=1$ 或 $\eta=1$，相应的方程移项后即得 $a+c=b+d$。余下唯一的情况是 $\varepsilon=\eta=-1$，即 $b-a=d-c$ 及 $d-a=b-c$。以第一式减去第二式，得 $b-d=d-b$，故 $b=d$，这与顶点互不相同矛盾。因此 $a+c=b+d$，等价关系得证。

正方形的判别条件

设 $ABCD$ 是平行四边形，并设 $m = \frac{1}{2}(a+c) = \frac{1}{2}(b+d)$ 为两条对角线（diagonal）的公共中点（即其中心）。那么

$$a-m = \tfrac{1}{2}(a-c), \qquad b-m = \tfrac{1}{2}(b-d), \qquad c-m = -(a-m), \qquad d-m = -(b-m).$$

若 $ABCD$ 是正方形（square），则其对角线长度相等，并互相垂直平分，所以 B 是由 A 绕 m 旋转四分之一圈得到的。由于顶点按逆时针方向标记，这个旋转是逆时针的。所以 $b-m = \mathrm{i}(a-m)$，即 $\frac{1}{2}(b-d) = \frac{1}{2}\mathrm{i}(a-c)$，也就是 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$。

反之，若 $\mathrm{i}(a-c) = b-d$，记 $w = a-m \neq 0$。那么

$$a-m = w, \quad b-m = \mathrm{i}w, \quad c-m = -w, \quad d-m = -\mathrm{i}w,$$

所以四个顶点就是 w 绕 m 依次旋转 $90°$ 所得。它们是一个正方形的顶点（四条边长均为 $|w|\sqrt{2}$，而且每条边都是前一条边乘以 i）。第二个等价关系得证。

第 (i) 部分

顶点 P, Q, R, S 按逆时针排列，所以当我们由 P 走向 Q 时，$PQRS$ 的内部在我们的左方。因此建在 PQ 外侧的正方形位于我们的右方。

从 PQ 的中点 $\frac{1}{2}(p+q)$ 出发，沿垂直于 PQ 的方向向右移动 $\frac{1}{2}|q-p|$（半条边长），便到达中心 X。把 $q-p$ 乘以 $-\mathrm{i}$ 会使它顺时针旋转 $90°$，即转向右方，所以这一步是 $-\frac{1}{2}\mathrm{i}(q-p)$。因此

$$x = \tfrac{1}{2}(p+q) - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}(q-p) = \tfrac{1}{2}(p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i})),$$

即为所求。

> ? **想一想** 为甚么是 $-\mathrm{i}$ 而不是 $+\mathrm{i}$?

乘以 $+\mathrm{i}$ 会把 $\overrightarrow{PQ}$ 转向左方，指向四边形内部，得到的是建在内侧的正方形的中心。由于每个内角都小于 $180°$，内部完全位于每条边的左方，所以右方确实是外侧。

第 (ii) 部分

对每条边依次应用第 (i) 部分（同样的推理对每条边都适用，因为每条边都是在内部位于左方的情况下走过的），

$$2x = p(1+\mathrm{i}) + q(1-\mathrm{i}), \qquad 2y = q(1+\mathrm{i}) + r(1-\mathrm{i}),$$
$$2z = r(1+\mathrm{i}) + s(1-\mathrm{i}), \qquad 2t = s(1+\mathrm{i}) + p(1-\mathrm{i}).$$

我们比较两个判别条件中的表达式。

对顶点之和。

$$\begin{aligned}2(x+z)-2(y+t) &= (p+r)(1+\mathrm{i})+(q+s)(1-\mathrm{i})-(q+s)(1+\mathrm{i})-(p+r)(1-\mathrm{i})\\ &= 2\mathrm{i}\,(p+r-q-s),\end{aligned}$$

所以

$$x+z-(y+t)=\mathrm{i}(p+r-(q+s)). \tag{1}$$

对角线。

$$2\mathrm{i}(x-z)=\mathrm{i}(p-r)(1+\mathrm{i})+\mathrm{i}(q-s)(1-\mathrm{i})=(p-r)(\mathrm{i}-1)+(q-s)(1+\mathrm{i}),$$
$$2(y-t)=(q-s)(1+\mathrm{i})+(r-p)(1-\mathrm{i})=(q-s)(1+\mathrm{i})+(p-r)(\mathrm{i}-1).$$

两者完全相同，所以

$$\mathrm{i}(x-z)=y-t \tag{2}$$

对每一个这样的四边形 $PQRS$ 都成立：线段 XZ 与 YT 总是长度相等且互相垂直。

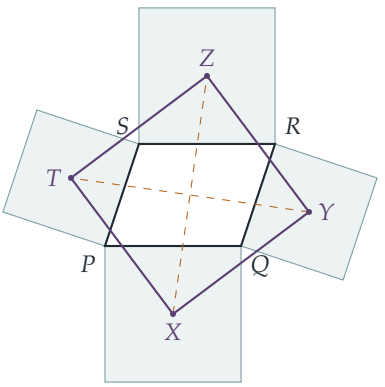
想一想 既然 (2) 总是成立，那么决定 $XYZT$ 是否正方形的是甚么？

只有平行四边形条件。现在我们把各部分结合起来。

若 $PQRS$ 是平行四边形，则 $p+r=q+s$，所以由 (1) 得 $x+z=y+t$，根据第一个结果，$XYZT$ 是平行四边形。再结合 (2)，由正方形的判别条件可知 $XYZT$ 是正方形。（该判别条件中“反之”的一半不需要任何关于标记方向的假设；而且 $X\neq Z$，因为若 $x=z$，则 $r-p=\mathrm{i}(s-q)$，即 $\overrightarrow{PR}$ 是 $\overrightarrow{QS}$ 逆时针旋转四分之一圈所得；但在按逆时针标记的凸四边形（convex quadrilateral）中，$\overrightarrow{PR}$ 总是由 $\overrightarrow{QS}$ 顺时针旋转一个介乎 0° 与 180° 之间的角，再经缩放而得。）

若 $XYZT$ 是正方形，则它特别地是平行四边形，所以根据第一个结果，$x+z=y+t$。由 (1) 得 $\mathrm{i}(p+r-q-s)=0$，所以 $p+r=q+s$，$PQRS$ 是平行四边形。

因此，$XYZT$ 是正方形当且仅当 $PQRS$ 是平行四边形。



验算

取平行四边形 $p = 0$、$q = 4$、$r = 5 + 3\mathrm{i}$、$s = 1 + 3\mathrm{i}$（如上图）。公式给出 $x = 2 - 2\mathrm{i}$、$y = 6 + \mathrm{i}$、$z = 3 + 5\mathrm{i}$、$t = -1 + 2\mathrm{i}$。$XYZT$ 的各边为 $4 + 3\mathrm{i}$、$-3 + 4\mathrm{i}$、$-4 - 3\mathrm{i}$、$3 - 4\mathrm{i}$，每条都是前一条的 i 倍：这是边长为 5 的正方形。作为对第 (i) 部分的验算，$x = 2 - 2\mathrm{i}$ 确实是 PQ 下方、顶点为 0、4、$4 - 4\mathrm{i}$、$-4\mathrm{i}$ 的正方形的中心。以电脑对数以千计的随机凸四边形进行检验，每次都证实恒等式（identity）(2) 成立，而且 $XYZT$ 是正方形恰好当 $PQRS$ 是平行四边形。

常见错误

- 在第 (i) 部分使用 $+\mathrm{i}$，结果把正方形放在四边形内侧。
- 在平行四边形的判别条件中，忘记“平行且相等”也容许 $b - a = -(c - d)$，而这种情况必须排除。
- 对“当且仅当”只证明了一个方向。在第 (ii) 部分，“正方形 $\Rightarrow$ 平行四边形”这个方向只需用到 (1)。

STEP 之外

恒等式 (2) 就是范奥贝尔定理（van Aubel's theorem）：对任何四边形，连接相对两个外接正方形中心的线段长度相等且互相垂直。这是一个普遍原理的小例子：由旋转和中点构成的几何作图，都是作用于顶点上的线性映射（linear map），因此有关它们的定理都可化为代数恒等式（关于等边三角形的拿破仑定理（Napoleon's theorem）是另一个例子）。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《可视化复分析》）以优美的方式发展了这种看待复数乘法的几何观点。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。