详细解答

STEP III 2014，第 4 题

纯数学 · 积分不等式

> **STEP III 2014，第 4 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q4

本题在 *Beyond STEP* 第 4.7 节变分法中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch04/variations.html

关键思路

把 I_1 中的平方展开，再与 I 比较：两者之差是一个恰当导数（exact derivative）$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right)$ 的积分，而由于 $y(1)=0$ 及 $\tan 0=0$，这个积分等于零。一旦把 I 写成某个平方的积分，它非负就显而易见了。在第 (ii) 部分，只要选取 b 使 $\sec^2$ 项恰好产生 a^2y^2，同一技巧依然奏效；唯一可能出问题的地方，是 $\tan bx$ 在 $[0,1]$ 内趋于无穷。

解答

如题目所意，我们全程假设 y 在 $[0,1]$ 上有连续导数（continuous derivative）。

第 (i) 部分

由于 $0\le x\le 1<\frac{\pi}{2}$，函数 $\tan x$ 在 $[0,1]$ 上连续，所以 I_1 有意义。展开平方，

$$I_1=\int_0^1\left((y')^2+2yy'\tan x+y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x,$$

因此

$$\begin{aligned}I-I_1&=-\int_0^1\left(y^2+2yy'\tan x+y^2\tan^2 x\right)\mathrm{d}x\\&=-\int_0^1\left(2yy'\tan x+y^2\sec^2 x\right)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

这里用了 $1+\tan^2 x=\sec^2 x$。由乘积法则（product rule），$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(y^2\tan x\right)=2yy'\tan x+y^2\sec^2 x$，正好就是被积函数。故此

$$I-I_1=-\Big[y^2\tan x\Big]_0^1=-\left(y(1)^2\tan 1-y(0)^2\tan 0\right)=0,$$

因为 $y(1)=0$ 且 $\tan 0=0$。所以 $I=I_1$，得证。

由于 I_1 是一个平方在长度为正的区间上的积分，$I_1\geq 0$，因此 $I\geq 0$。

现在假设 $I=0$。那么 $I_1=0$，而被积函数 $(y'+y\tan x)^2$ 连续且非负，所以它必须在 $[0,1]$ 上处处为零（若它在某一点为正，便会在一个小区间上为正，令积分为正）。因此对 $0\leq x\leq 1$ 有 $y'+y\tan x=0$。

> **想一想** 怎样在不除以 y 的情况下解 $y'+y\tan x=0$？毕竟 y 可能在某处为零。

使用积分因子（integrating factor）。由于在 $[0,1]$ 上 $\cos x>0$，

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y}{\cos x}\right)=\frac{y'\cos x+y\sin x}{\cos^2 x}=\frac{y'+y\tan x}{\cos x}=0,$$

所以对某常数 C 有 $y=C\cos x$。条件 $y(1)=0$ 给出 $C\cos 1=0$，而 $\cos 1\neq 0$，所以 $C=0$。故此，仅当对 $[0,1]$ 中所有 x 都有 $y=0$ 时，才有 $I=0$。

第 (ii) 部分

设 $K=\displaystyle\int_0^1 (y'+ay\tan bx)^2\,\mathrm{d}x$，其中 $b>0$ 有待选取。展开，

$$K=\int_0^1\left((y')^2+2ayy'\tan bx+a^2y^2\tan^2 bx\right)\mathrm{d}x.$$

我们希望出现的导数是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan bx\right)=2ayy'\tan bx+aby^2\sec^2 bx=2ayy'\tan bx+aby^2+aby^2\tan^2 bx.$$

把它与 K 的被积函数比较，$\tan^2$ 项恰好吻合当且仅当 $ab=a^2$，即 $b=a$。作此选择后，

$$(y'+ay\tan ax)^2=(y')^2-a^2y^2+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(ay^2\tan ax\right),$$

于是

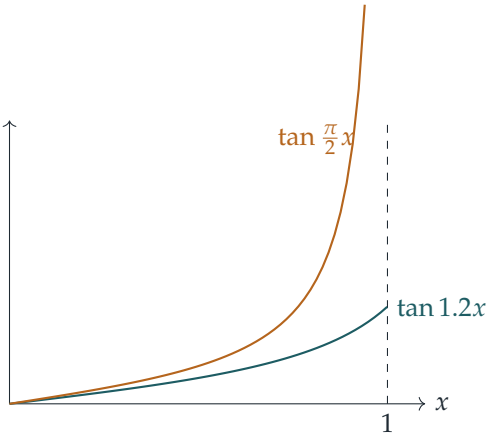
$$K=J+\Big[ay^2\tan ax\Big]_0^1=J+a\,y(1)^2\tan a=J,$$

因为 $y(1)=0$ 且 $\tan 0=0$。

这个论证需要 $\tan ax$ 在整个 $[0,1]$ 上有定义且连续，这样 K 才存在，微积分基本定理（fundamental theorem of calculus）才适用。由于 $a>0$，ax 取遍 $[0,a]$，而 tan 在其上连续当且仅当 $a<\frac{\pi}{2}$。所以证明在以下情况成立：

$$a<k=\frac{\pi}{2}.$$

对这样的 a，我们有 $J = K \geq 0$，因为 K 是一个平方的积分。（事实上，把第 (i) 部分论证中的 $\cos x$ 换成 $\cos ax$，可知 $J = 0$ 会迫使 $y = C\cos ax$ 且 $C\cos a = 0$，所以 $y \equiv 0$；对于不恒为零的 y，我们甚至得到 $J > 0$。）



上图说明为何 $k = \frac{\pi}{2}$：当 $a < \frac{\pi}{2}$ 时，权函数 $\tan ax$ 在 $[0,1]$ 上保持有界；但当 $a = \frac{\pi}{2}$ 时，它在端点 $x = 1$ 处有一条渐近线（asymptote）。

$a = \frac{\pi}{2}$ 的情况

证明本身提示了该往哪里找：$K = 0$ 需要 $y' + ay\tan ax = 0$，其解为 $y = C\cos ax$。当 $a < \frac{\pi}{2}$ 时，这些解不满足条件 $y(1) = 0$；但当 $a = \frac{\pi}{2}$ 时，它们满足。所以试取

$$y = \cos\tfrac{\pi x}{2}, \qquad y' = -\tfrac{\pi}{2}\sin\tfrac{\pi x}{2},$$

它并非处处为零，且 $y(1) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$。于是

$$\begin{aligned} J &= \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \left(\sin^2\tfrac{\pi x}{2} - \cos^2\tfrac{\pi x}{2}\right)\mathrm{d}x = -\frac{\pi^2}{4}\int_0^1 \cos \pi x\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{\pi^2}{4}\left[\frac{\sin \pi x}{\pi}\right]_0^1 = 0. \end{aligned}$$

所以当 $a = k$ 时，$y = \cos\frac{\pi x}{2}$（或它的任何非零倍数）给出 $J = 0$。

验算

- 在第 (i) 部分取 $y = 1 - x$：$I = \int_0^1 \left(1 - (1-x)^2\right)\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} > 0$，而以数值方法计算 I_1 也得到 0.6667。
- 对许多随机选取的 $(1-x)$ 的三次多项式倍数，以及 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中随机选取的 a，电脑验算以高精度确认了 $J = K > 0$。

- 界限 $k = \frac{\pi}{2}$ 是最佳的：取 $y = \cos\frac{\pi x}{2}$，可得 $J = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{4} - a^2\right)$，对每个 $a > \frac{\pi}{2}$ 都是负数（例如当 $a = 2$ 时 $J \approx -0.766$）。

常见错误

- 忘记 $x = 0$ 处的边界项为零是因为 $\tan 0 = 0$，而不是因为 $y(0)$ 满足甚么条件；题目对 $y(0)$ 没有任何假设。
- 由 $I_1 = 0$ 推出 $y' + y\tan x = 0$ 时没有说明理由：关键在于被积函数的连续性。
- 选取 b 时没有检查 $\tan bx$ 在 $[0,1]$ 上是否保持有限；条件 $a < \frac{\pi}{2}$ 正是由此而来。

STEP 之外

对于 $y(1) = 0$ 的不等式 $\int_0^1 (y')^2\,\mathrm{d}x \geq \frac{\pi^2}{4}\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}x$，是 Wirtinger 不等式（Wirtinger's inequality，亦称庞加莱（Poincaré）不等式）的一种形式，而常数 $\frac{\pi^2}{4}$ 是 $-y'' = \lambda y$ 在 $y'(0) = 0$、$y(1) = 0$ 条件下的最小特征值（eigenvalue）；极值函数 $\cos\frac{\pi x}{2}$ 就是对应的特征函数（eigenfunction）。在变分法（calculus of variations）中，借助一个精心选取的导数来配方，正是勒让德（Legendre）和雅可比（Jacobi）判别法背后的想法，用以判断一条驻定路径（stationary path）是否真的是极小值。想找更多同类题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*；至于背后的特征值问题，可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。