详细解答

STEP III 2014，第 3 题

纯数学 • 到抛物线的距离

STEP III 2014，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q3

关键思路

抛物线（parabola）上每一点都可以写成 $(at^2, 2at)$，因此我们需要的每个距离都变成单一变量 t 的函数；而在两个部分中，这个函数原来都是二次函数（quadratic）（对直线而言是 t 的二次函数，对点而言是 t^2 的二次函数）。求二次函数的最小值只不过是配方（completing the square），但我们必须留意变量可以取值的范围：t^2 不可以是负数，而正是这个限制把第 (ii) 部分分成不同情况。至于圆的部分则唾手可得，因为一点到一个圆的距离，就是该点到圆心的距离减去半径。

解答

第 (i) 部分

把 L 写成 $mx - y + c = 0$。抛物线上的点 $P = (at^2, 2at)$ 到 L 的垂直距离（perpendicular distance）是

$$\frac{|mat^2 - 2at + c|}{\sqrt{m^2 + 1}}.$$

设 $f(t) = mat^2 - 2at + c$。由于 $ma > 0$，配方得

$$f(t) = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + c - \frac{a}{m} = ma\left(t - \frac{1}{m}\right)^2 + \frac{mc - a}{m},$$

所以 f 的最小值是 $\dfrac{mc - a}{m}$，在 $t = 1/m$ 时取得。

情况 $mc > a$。此时对每个 t 都有 $f(t) \geq \frac{mc-a}{m} > 0$，因此整条抛物线位于 L 的同一侧，永不与之相交。L 与抛物线之间的最短距离，就是抛物线上的点到 L 的最小距离，即

$|f(t)|/\sqrt{m^2+1} = f(t)/\sqrt{m^2+1}$ 的最小值：

$$\frac{mc-a}{m\sqrt{m^2+1}},$$

正如所求。最近的点是 $t = 1/m$，该处抛物线切线（tangent）的斜率为 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = 1/t = m$：切线与 L 平行，与几何直觉一致。

情况 $mc \le a$。此时 $f(1/m) \le 0$，而当 $t \to \infty$ 时 $f(t) \to +\infty$。由于 f 是连续（continuous）的，存在某个 t 使 $f(t) = 0$，所以 L 与抛物线相交，最短距离为 0。

第 (ii) 部分：点 $(p, 0)$

由 $C = (p, 0)$ 到 $P = (at^2, 2at)$ 的距离的平方是

$$(at^2 - p)^2 + 4a^2t^2.$$

这只取决于 $u = t^2$，而 u 可取 $[0, \infty)$ 中的每一个值。因此我们要求

$$g(u) = (au - p)^2 + 4a^2u = a^2u^2 - 2a(p-2a)u + p^2 \qquad (u \ge 0).$$

的最小值。配方得

$$g(u) = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + p^2 - (p-2a)^2 = a^2\left(u - \frac{p-2a}{a}\right)^2 + 4a(p-a).$$

> **想一想** 不受限制时，g 的最小值在 $u = (p-2a)/a$ 取得。这个值是否总是可以取到？

不是：$u = t^2$ 必须是非负数，而只有当 $p \ge 2a$ 时才有 $(p-2a)/a \ge 0$。

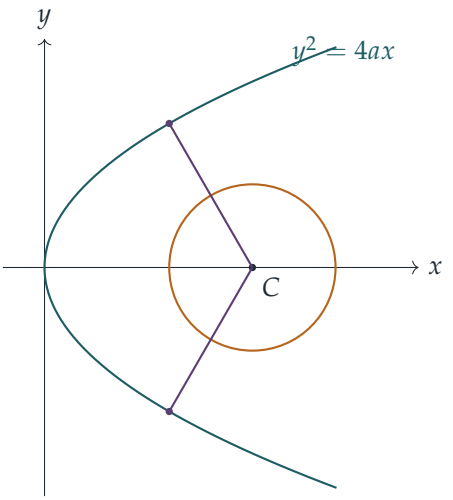
情况 $p/a > 2$。顶点（vertex）$u = p/a - 2$ 是正数，因此可以取到，g 的最小值是 $4a(p-a)$；由于 $p > 2a > a$，这个值是正数。最短距离是

$$2\sqrt{a(p-a)},$$

在两点 $(p-2a,\ \pm 2\sqrt{a(p-2a)})$ 取得。

情况 $p/a \le 2$。顶点位于 $u \le 0$，因此 g 在 $u \ge 0$ 上递增，其在该范围内的最小值是 $g(0) = p^2$。最短距离是 p，在抛物线的顶点 $(0, 0)$ 取得。

两个答案在 $p = 2a$ 时吻合，两者都给出 $2a$。



图中所示为 $a = 1$、$p = 5$ 的情况：抛物线上最接近 C 的点（紫色）距离为 $2\sqrt{1 \cdot 4} = 4$，而以 C 为圆心、半径为 $b = 2$ 的圆（琥珀色）与抛物线保持 2 的距离。

第 (ii) 部分：圆

设 d 为刚才求得的由 $C = (p, 0)$ 到抛物线的距离，即

$$d = \begin{cases} p & \text{若} p \leq 2a, \\ 2\sqrt{a(p-a)} & \text{若} p > 2a. \end{cases}$$

该圆的圆心为 C，半径为 b。

若 $d > b$。在抛物线上任取一点 P，在圆上任取一点 Q。由三角不等式（triangle inequality），

$$|PQ| \geq |PC| - |CQ| = |PC| - b \geq d - b > 0.$$

当 P 是抛物线上最接近 C 的点，而 Q 是线段 CP 与圆的交点时（由于 $|CP| = d > b$，线段确实与圆相交），等号成立。因此最短距离是 $d - b$。

若 $d \leq b$。当 P 沿抛物线移动时，$|PC|$ 由其最小值 $d \leq b$ 连续地变化至任意大的值，因此在某处有 $|PC| = b$。该点同时位于两条曲线上，最短距离为 0。

综合以上，圆与抛物线之间的最短距离是

$$\begin{cases} p - b & \text{若} p \leq 2a \text{ 且} b < p, \\ 2\sqrt{a(p-a)} - b & \text{若} p > 2a \text{ 且} b < 2\sqrt{a(p-a)}, \\ 0 & \text{其他情况（即若} b \geq d\text{）}. \end{cases}$$

验算

- 取 $m=1$、$c=2$、$a=1$，则 $mc=2>a$。公式给出 $\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.7071$；直接计算，$t=1$ 的点是 $(1,2)$，它到 $x-y+2=0$ 的距离是 $|1-2+2|/\sqrt{2}=1/\sqrt{2}$。若改取 $c=\frac{1}{2}$（使 $mc<a$），直线 $y=x+\frac{1}{2}$ 与 $y^2=4x$ 相交于满足 $x^2-3x+\frac{1}{4}=0$ 之处，此方程有实根，确认距离为 0。
- 取 $a=1$、$p=5$：点 $(3,\pm 2\sqrt{3})$ 与 $(5,0)$ 的距离为 $\sqrt{4+12}=4=2\sqrt{1\cdot 4}$，而以电脑在抛物线上搜索，找不到更近的点。
- 当 $p\to 0$ 时距离 $p\to 0$，这是正确的，因为 $(0,0)$ 在抛物线上。当 p 很大时，$2\sqrt{a(p-a)}<p$，这是必然的，因为顶点的距离是 p。
- 所有结果都经电脑以数百组随机选取的 m、c、a、p 和 b 搜索验证。

常见错误

- 把距离平方对 t 的导数（derivative）设为零时，遗漏了根 $t=0$，或忘记当 $p<2a$ 时 $t^2=p/a-2$ 无解：分情况讨论正是第 (ii) 部分的重点所在。
- 在 $mc<a$ 时仍给出 $(mc-a)/(m\sqrt{m^2+1})$：这个值是负数，而且直线其实与抛物线相交。
- 在圆的部分写出 $d-b$ 而不检查其正负；当 $b\geq d$ 时两条曲线相交，答案是 0。

STEP 之外

第 (ii) 部分中的最近点，正是 CP 为抛物线法线（normal）之处，而在 $p=2a$ 处的转变并非偶然：$(2a,0)$ 是抛物线在顶点处的曲率中心（centre of curvature）。在它之外的点，在对称轴以外有两个最近点；这类转变点的轨迹称为渐屈线（evolute），是曲线微分几何（differential geometry）中的经典对象。在受限制的范围内求函数的最小值，而答案可能位于边界而非驻点（stationary point），正是约束优化（constrained optimisation）的起点。如想做更多同类型的题目，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学问题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。