详细解答

STEP III 2014，第 2 题

纯数学 · 双曲函数积分法

STEP III 2014，第 2 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q2

关键思路

两个被积函数（integrand）的分母都是 $\cosh 2x$，而倍角公式（double-angle formula）既可以用 $\cosh^2 x$ 表示，也可以用 $\sinh^2 x$ 表示。选取与分子配合的那个版本，每个积分便会化成标准的有理函数积分。至于最后一部分，窍门是回到指数函数：令 $u = \mathrm{e}^x$，两个被积函数都会变成分母为 $1 + u^4$ 的 u 的有理函数（rational function），而把它们适当组合，恰好得到 $1/(1+u^4)$。

解答

第 (i) 部分

我们利用 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$。令 $u = \cosh x$，则 $\mathrm{d}u = \sinh x \,\mathrm{d}x$，所以

$$\int \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2 - 1}.$$

分母可因式分解为 $(\sqrt{2}u - 1)(\sqrt{2}u + 1)$，而两个因式相差 2，所以

$$\frac{1}{2u^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}u - 1} - \frac{1}{\sqrt{2}u + 1}\right).$$

每一项积分后都是对数，并因 u 的系数而多出因子 $\frac{1}{\sqrt{2}}$：

$$\begin{aligned}\int \frac{\mathrm{d}u}{2u^2-1} &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\Big(\ln|\sqrt{2}u - 1| - \ln|\sqrt{2}u + 1|\Big) + C \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln\left|\frac{\sqrt{2}\cosh x - 1}{\sqrt{2}\cosh x + 1}\right| + C,\end{aligned}$$

这就是所求结果。（事实上 $\cosh x \geq 1$ 使得 $\sqrt{2}\cosh x - 1 > 0$，所以对实数 x 而言，绝对值符号并非必要。）

第 (ii) 部分

现在分子是 $\cosh x$，即 $\sinh x$ 的导数（derivative），所以相应的代换（substitution）是 $u = \sinh x$，$\mathrm{d}u = \cosh x\,\mathrm{d}x$。写成 $\cosh 2x = 1 + 2\sinh^2 x$，得

$$\begin{aligned}\int \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\mathrm{d}u}{1+2u^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\,u) + C \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) + C,\end{aligned}$$

这里用了 $\int \mathrm{d}u/(1+a^2u^2) = \frac{1}{a}\arctan(au)$，其中 $a = \sqrt{2}$。

第 (iii) 部分

乍看之下，$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4}$ 里完全没有 cosh。

> **想一想** 如果把所有东西都用 $u = \mathrm{e}^x$ 表示，$\cosh x/\cosh 2x$ 会变成甚么样子？

由于 $\cosh x = \frac{1}{2}(u + u^{-1})$ 及 $\cosh 2x = \frac{1}{2}(u^2 + u^{-2})$，分子分母同乘 u^2，得

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x} = \frac{u + u^{-1}}{u^2 + u^{-2}} = \frac{u(u^2+1)}{u^4+1}, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x} = \frac{u(u^2-1)}{u^4+1}.$$

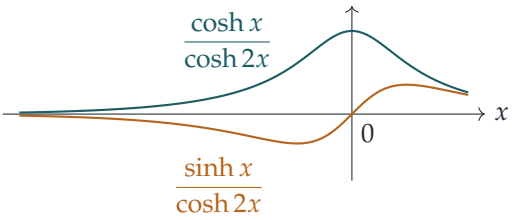
此外 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$，所以多出来的因子 u 会约去：

$$\frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1+u^2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u, \qquad \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{u^2-1}{1+u^4}\,\mathrm{d}u.$$

第一式减去第二式，剩下 $\dfrac{2}{1+u^4}\,\mathrm{d}u$。最后，$u$ 由 0 变到 1，即 $x = \ln u$ 由 $-\infty$ 变到 0。因此

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_{-\infty}^0 \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x.$$

右边两个积分都收敛（converge），因为当 $x \to -\infty$ 时，每个被积函数都是 $O(\mathrm{e}^x)$。（左边是普通的积分，所以这其实只是一次变量代换，无穷的那一端来自 $u \to 0$。）



cosh 的积分。由第 (ii) 部分，当 $x \to -\infty$ 时 $\sinh x \to -\infty$，所以 $\arctan(\sqrt{2}\sinh x) \to -\frac{\pi}{2}$。因此

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\cosh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\arctan 0 - \left(-\tfrac{\pi}{2}\right)\right) = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

sinh 的积分。由第 (i) 部分，当 $x \to -\infty$ 时 $\cosh x \to \infty$，所以对数内的分数趋向 1，对数则趋向 0。在 $x = 0$ 处，$\cosh 0 = 1$，所以

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}.$$

有理化（rationalising）后，$\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1} = (\sqrt{2}-1)^2$，而 $\sqrt{2}-1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}+1}$，所以

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\sinh x}{\cosh 2x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}-1) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1).$$

这个值是负数，理应如此：当 $x < 0$ 时 $\sinh x < 0$（见琥珀色曲线）。

综合起来。

$$\int_{0}^{1} \frac{\mathrm{d}u}{1+u^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \ln(\sqrt{2}+1)\right) = \frac{\pi + 2\ln(\sqrt{2}+1)}{4\sqrt{2}},$$

正如所求。

验算

- 把 (i) 和 (ii) 的答案求导，应还原为被积函数；就 (ii) 而言，$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}\sinh x) = \dfrac{\cosh x}{1+2\sinh^2 x}$。
- 最终数值为 ≈ 0.86697，与用辛普森法则（Simpson's rule）计算 $\int_0^1 \mathrm{d}u/(1+u^4)$ 的结果相符。它合理地介乎 $\frac{\pi}{4} \approx 0.785$（较小的函数 $1/(1+u^2)$ 的积分）与 1 之间。
- 另外，两个无穷积分亦已用数值方法分别核实：$\pi/(2\sqrt{2}) \approx 1.1107$ 及 $-\ln(1+\sqrt{2})/\sqrt{2} \approx -0.6232$。

常见错误

- 在第 (ii) 部分也用 $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$：当 $u = \sinh x$ 时，你需要的是 $\sinh^2$ 的形式，即 $1 + 2\sinh^2 x$。
- 忘记当 $u = \mathrm{e}^x$ 时 $\mathrm{d}x = \mathrm{d}u/u$；正是这个因子约去了分子中多余的 u。
- 弄错积分上下限：$u \in [0,1]$ 对应的是 $x \in (-\infty, 0]$，而不是 $[0,1]$。

STEP 之外

同一个积分也可以直接用部分分式（partial fractions）来做，因为 $1+u^4=(u^2+\sqrt{2}u+1)(u^2-\sqrt{2}u+1)$；而利用 $\frac{1+u^2}{1+u^4}$ 与 $\frac{1-u^2}{1+u^4}$ 的组合，是一条省去大部分代数运算的巧妙捷径。在大学里，像 $\int_0^\infty \mathrm{d}u/(1+u^4)=\pi/(2\sqrt{2})$ 这类积分，用围道积分（contour integration）和留数定理（residue theorem）一行就能完成，而反常积分（improper integral）则会在分析（analysis）课程中以完全严谨的方式处理。Needham 的 *Visual Complex Analysis*（《直观复分析》）是领略复分析这一面的绝佳读物。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。