详细解答

STEP III 2014，第 13 题

概率与统计 · 概率生成函数

> **STEP III 2014，第 13 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q13

关键思路

就第一回合的结果作条件分析。这个游戏没有记忆：在任何一个游戏得以继续的回合之后，接下来的进程就是同一个游戏的全新副本，因此从那一刻起的额外得分与 N 本身具有相同的分布（distribution）。这样便得到一条以 G 自身表示 G 的方程，我们解出这条方程，再把结果展开成几何级数（geometric series）。

解答

记 $p_n = P(N = n)$，于是 $G(t) = \sum_{n\geq 0} p_n t^n$。设 E_1、E_2、E_3 分别为第一回合结果是 1、2 或 3 的事件，因此 $P(E_1) = a$、$P(E_2) = b$、$P(E_3) = c$。

第 (i) 部分

在 E_1 发生的条件下，游戏以得分 0 结束，所以 $P(N = 0 \mid E_1) = 1$，而当 $n \geq 1$ 时 $P(N = n \mid E_1) = 0$。因此条件生成函数（conditional generating function）为

$$\sum_{n\geq 0} P(N = n \mid E_1)\, t^n = 1 \cdot t^0 = 1.$$

第 (ii) 部分

在 E_2 发生的条件下，第一回合后得分仍是 0，游戏继续。由于每个回合的概率相同，而且不受之前的结果影响，从第二回合起的各回合便构成一个从得分 0 开始的全新游戏。设 N' 为这个新游戏所产生的得分，它与 N 同分布。最终得分为 $0 + N' = N'$，所以

$$P(N = n \mid E_2) = P(N' = n) = p_n \quad \text{对所有} n \geq 0,$$

而条件生成函数为 $\sum p_n t^n = G(t)$。

第 (iii) 部分

同理，在 E_3 发生的条件下，第一回合后得分为 1，其余部分是一个得分为 N' 的全新游戏，所以最终得分为 $1+N'$。因此 $P(N=0 \mid E_3)=0$，而当 $n \geq 1$ 时 $P(N=n \mid E_3)=p_{n-1}$；条件生成函数为 $\sum_{n\geq 1} p_{n-1}t^n = tG(t)$。

根据全概率定律（law of total probability），

$$p_n = a\,P(N=n \mid E_1) + b\,P(N=n \mid E_2) + c\,P(N=n \mid E_3).$$

$G(t)$ 中 t^n 的系数是 p_n。在右边，1、$G(t)$ 和 $tG(t)$ 中 t^n 的系数恰好就是第 (i)–(iii) 部分所得的 $P(N=n \mid E_1)$、$P(N=n \mid E_2)$ 和 $P(N=n \mid E_3)$。所以对所有 $n \geq 0$，$G(t)$ 与 $a+bG(t)+ctG(t)$ 中 t^n 的系数都相等，这就证明了

$$G(t) = a + bG(t) + ctG(t).$$

? **想一想** 我们可以除以 $1-b-ct$ 吗？把它展开成几何级数又是否合理？

移项得 $G(t)(1-b-ct)=a$。由于 $1-b=a+c>c>0$，只要 $|t|<(1-b)/c$，便有 $1-b-ct\neq 0$；又因为 $(1-b)/c = 1+a/c > 1$，这个范围包含 $|t|\leq 1$。对于这样的 t，

$$G(t) = \frac{a}{1-b-ct} = \frac{a}{1-b}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{ct}{1-b}} = \frac{a}{1-b}\sum_{n\geq 0}\left(\frac{c}{1-b}\right)^n t^n,$$

因为 $|ct/(1-b)|<1$。读出 t^n 的系数，得

$$P(N=n) = \frac{ac^n}{(1-b)^{n+1}}, \qquad n \geq 0.$$

（等价地，比较系数可得 $p_0 = a+bp_0$，以及当 $n\geq 1$ 时 $p_n = bp_n + cp_{n-1}$，即 $p_0 = a/(1-b)$ 及 $p_n = \frac{c}{1-b}p_{n-1}$，同样得出上述公式。）

第 (iv) 部分

平均值（mean）为 $\mu = G'(1)$。对 $G(t) = a(1-b-ct)^{-1}$ 求导，

$$G'(t) = \frac{ac}{(1-b-ct)^2}, \qquad \text{因此} \qquad \mu = G'(1) = \frac{ac}{(1-b-c)^2} = \frac{ac}{a^2} = \frac{c}{a},$$

这里用了 $1-b-c=a$。于是 $1+\mu = \dfrac{a+c}{a} = \dfrac{1-b}{a}$，所以

$$\frac{\mu^n}{(1+\mu)^{n+1}} = \frac{c^n}{a^n}\cdot\frac{a^{n+1}}{(1-b)^{n+1}} = \frac{ac^n}{(1-b)^{n+1}} = P(N=n),$$

得证。

验算

- 概率总和为 1：$\sum_n p_n = G(1) = a/(1-b-c) = a/a = 1$。
- 直接论证：忽略那些“白费”的结果 2 回合。余下的每个回合，以概率 $a/(a+c)$ 结束游戏，或以概率 $c/(a+c)$ 得一分，所以 N 是第一次结束之前所得的分数，而 $P(N=n) = \left(\frac{c}{a+c}\right)^n \frac{a}{a+c}$；由于 $a+c = 1-b$，这与上述公式相同。
- 取 $a = \frac{1}{5}$、$b = \frac{3}{10}$、$c = \frac{1}{2}$，得 $\mu = \frac{5}{2}$，以及 $P(N=0) = \frac{2}{7} \approx 0.2857$、$P(N=1) = \frac{10}{49} \approx 0.2041$。以电脑模拟 2×10^5 局游戏，得到 0.2855、0.2038，平均得分为 2.498。

常见错误

- 把情况 3 的条件生成函数写成 $G(t)$ 而不是 $tG(t)$：已经得到的那一分会令 t 的每个幂次都提高一次。
- 忘记说明为何第一回合之后的游戏是原游戏的副本：这有赖每个回合的概率都相同，而且与过去独立。

STEP 之外

就第一步作条件分析，是马可夫链（Markov chain）理论的基本工具，在该理论中称为首步分析（first-step analysis）；而这里的答案其实是一个经过伪装的几何分布（geometric distribution）。第 (iv) 部分说明，在 $\{0,1,2,\dots\}$ 上的几何分布单凭其平均值便可确定。同样的“为 G 建立方程”技巧也可处理分支过程（branching process），并由此导出关于一个姓氏最终消失的概率的著名结果。Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）对生成函数和分支过程的讲解非常易读。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。