详细解答

STEP III 2014，第 12 题

概率与统计 • 对数正态分布

> **STEP III 2014，第 12 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s3-q12

关键思路

由于 $y = \mathrm{e}^x$ 是严格递增（strictly increasing）的，只要取对数（logarithm），关于 Y 的命题便可化为关于 X 的命题：$Y \leq y$ 当且仅当 $X \leq \ln y$。这样便能立即得出 Y 的中位数（median）和密度。至于平均值（mean），技巧在于把指数部分配方（complete the square），使被积函数变成另一个正态分布的密度函数，而我们早已知道它的积分等于 1。

解答

第 (i) 部分

由于 e^x 严格递增，事件 $\{Y \leq \mathrm{e}^{x_m}\}$ 与事件 $\{X \leq x_m\}$ 是同一个事件。因此

$$\mathrm{P}(Y \leq \mathrm{e}^{x_m}) = \mathrm{P}(X \leq x_m) = \tfrac{1}{2},$$

所以 Y 的中位数是

$$y_m = \mathrm{e}^{x_m}.$$

（中位数可以这样经过任何递增函数而保持对应；平均值却不可以，第 (iv) 部分会说明这一点。）

第 (ii) 部分

Y 只取正值。对于 $y > 0$，设 G 为 Y 的累积分布函数（cumulative distribution function）。利用与前面相同的等价关系，

$$G(y) = \mathrm{P}(Y \leq y) = \mathrm{P}(X \leq \ln y) = F(\ln y).$$

利用连锁法则（chain rule）求导，并使用 $F' = f$，得

$$g(y) = G'(y) = f(\ln y) \cdot \frac{1}{y} = \frac{f(\ln y)}{y}, \qquad y > 0,$$

此即所求（而当 $y \le 0$ 时 $g(y) = 0$）。

众数（mode）λ 是 g 取最大值之处。它位于开区间 $(0, \infty)$ 内，而 g 在该区间上可导，所以 $g'(\lambda) = 0$。由商法则（quotient rule），

$$g'(y) = \frac{f'(\ln y) \cdot \frac{1}{y} \cdot y - f(\ln y)}{y^2} = \frac{f'(\ln y) - f(\ln y)}{y^2}.$$

由于 $y^2 \neq 0$，令 $g'(\lambda) = 0$ 便得

$$f'(\ln \lambda) = f(\ln \lambda),$$

这正是所求的条件。

第 (iii) 部分

函数

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)}$$

正好是一个 $\mathrm{N}(\mu + \sigma^2, \sigma^2)$ 随机变量（random variable）的概率密度函数（probability density function）：它就是题目给出的正态密度，只是把 μ 换成 $\mu + \sigma^2$。任何概率密度函数在整条实数线上的积分都等于 1，这便解释了题目所述的积分。

现在

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{E}(\mathrm{e}^X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^x \, \mathrm{e}^{-(x-\mu)^2/(2\sigma^2)} \, \mathrm{d}x.$$

我们把合并后的指数配方。展开 $(x - \mu - \sigma^2)^2 = (x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x + 2\mu\sigma^2 + \sigma^4$，得

$$\begin{aligned} x - \frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} &= -\frac{(x-\mu)^2 - 2\sigma^2 x}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2 - 2\mu\sigma^2 - \sigma^4}{2\sigma^2} \\ &= -\frac{(x-\mu-\sigma^2)^2}{2\sigma^2} + \mu + \tfrac{1}{2}\sigma^2. \end{aligned}$$

常数 $\mathrm{e}^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ 可提到积分号外，所以

$$\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-(x-\mu-\sigma^2)^2/(2\sigma^2)} \, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

这里用到了上面解释过的积分。这就是所求的结果。

第 (iv) 部分

我们把三个量都明确求出来。

中位数。正态密度关于 μ 对称，所以 $x_m = \mu$，再由第 (i) 部分得 $y_m = \mathrm{e}^{\mu}$。

众数。对正态密度求导，

$$f'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2} f(x).$$

想一想 当 f 永不为零时，我们该如何运用第 (ii) 部分的条件?

由于对每个 x 都有 $f(x) > 0$，我们可以把条件 $f'(\ln\lambda) = f(\ln\lambda)$ 除以 $f(\ln\lambda)$，得到

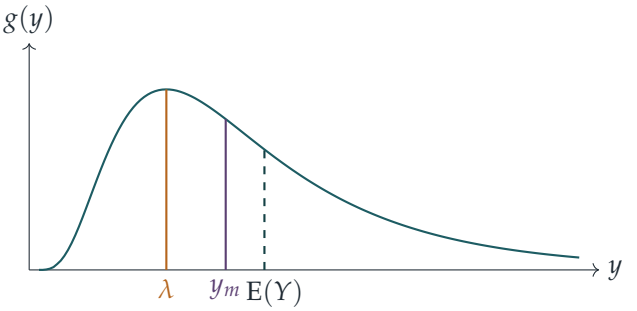
$$-\frac{\ln\lambda - \mu}{\sigma^2} = 1 \quad\Longrightarrow\quad \ln\lambda = \mu - \sigma^2 \quad\Longrightarrow\quad \lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2}.$$

这是 g 唯一的驻点（stationary point），而题目已告诉我们 Y 有唯一的众数，所以它就是众数。

比较。由于 $\sigma > 0$，我们有 $\mu - \sigma^2 < \mu < \mu + \frac{1}{2}\sigma^2$，而 e^t 严格递增，所以

$$\lambda = \mathrm{e}^{\mu-\sigma^2} \;<\; y_m = \mathrm{e}^{\mu} \;<\; \mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2},$$

此即所求。这些严格不等式（inequality）依赖于 $\sigma^2 > 0$，而这对任何真正的正态分布（normal distribution）都成立。



上图显示 $\mu = 0$、$\sigma = 0.6$ 时 Y 的密度：右边长长的尾部把平均值拉到最右，中位数居中，而峰值则在两者的左边。

验算

- 当 $\sigma \to 0$ 时，Y 集中于 e^{μ}，三个值都趋向 e^{μ}，理应如此。
- 取 $\mu = 0$、$\sigma = 1$：$\lambda = \mathrm{e}^{-1} \approx 0.368$，$y_m = 1$，而 $\mathrm{E}(Y) = \mathrm{e}^{1/2} \approx 1.649$。对 $\mathrm{e}^x f(x)$ 作数值积分，以及以数值方法搜索 g 的最大值，结果都与这些数值吻合。

- 比值 $\mathrm{E}(Y)/\lambda = \mathrm{e}^{3\sigma^2/2}$ 只取决于 σ，这是合理的：改变 μ 只是把 Y 乘以因子 e^{μ} 作缩放。

常见错误

- 把 Y 的密度写成 $f(\ln y)$，忘记了连锁法则带来的因子 $1/y$。缺少这个因子，众数便会算成 e^{μ}，与中位数相同。
- 误以为 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{X}) = \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$。这对中位数成立，但对平均值不成立。
- 配方时出现正负号错误：要小心展开 $(x-\mu-\sigma^2)^2$，并检查剩下的常数。

STEP 之外

这里的 Y 服从对数正态（lognormal）分布，常用来为收入、股价和粒子大小建立模型。不等式 $\mathrm{E}(\mathrm{e}^{X}) \geq \mathrm{e}^{\mathrm{E}(X)}$ 是凸函数（convex function）的琴生不等式（Jensen's inequality）的一个特例，而第 (iii) 部分的计算其实就是正态分布的矩母函数（moment generating function）$\mathrm{E}(\mathrm{e}^{tX}) = \mathrm{e}^{\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$ 在 $t = 1$ 时的值。Blitzstein 与 Hwang 所著的 *Introduction to Probability*（《概率导论》）涵盖了随机变量的变换、矩母函数以及对数正态分布。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。