详细解答

STEP III 2014，第 11 题

力学 · 圆周运动

STEP III 2014，第 11 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q11

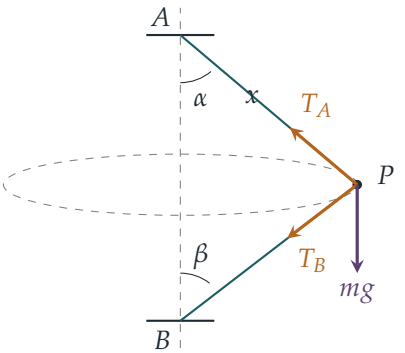
关键思路

质点受三个力作用（两条绳的张力（tension）及其重量），三者合起来必须恰好提供圆周运动所需的向心力（centripetal force）。分别沿铅垂及水平方向分解，便得到关于两个张力的两条线性方程。绳只能拉不能推，故 $T_B \geq 0$，由此得出所求的不等式。在临界情况下，下方的绳变得松弛，而在三角形 ABP 中应用余弦定理（cosine rule），便可知道 α 可以取哪些角度。

解答

建立模型

把 P 视为质点，两条绳视为轻而不可伸长。P 在一个以直线 AB 上一点为圆心的水平圆上运动，半径为 $r = x\sin\alpha$，所以其加速度为 $\omega^2 x\sin\alpha$，方向水平指向轴线。张力 T_A 沿 PA 作用，与向上的铅垂线成角 α。张力 T_B 沿 PB 作用，与向下的铅垂线成角 β。



求张力

沿铅垂方向（铅垂方向没有加速度）及沿水平指向轴线的方向分解：

$$T_A \cos\alpha - T_B \cos\beta = mg, \tag{1}$$

$$T_A \sin\alpha + T_B \sin\beta = m\omega^2 x \sin\alpha. \tag{2}$$

即使 β 是钝角，即 P 位于 B 之下，这两条方程仍然成立，因为此时 $\cos\beta < 0$，T_B 的铅垂分量指向上方，正合实际情况。

要消去 T_B，把 (1) 乘以 $\sin\beta$，(2) 乘以 $\cos\beta$，然后相加。利用 $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$，得

$$T_A = \frac{m\left(g\sin\beta + \omega^2 x \sin\alpha\cos\beta\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

要消去 T_A，把 (2) 乘以 $\cos\alpha$，(1) 乘以 $\sin\alpha$，然后相减：

$$T_B = \frac{m\sin\alpha\left(\omega^2 x\cos\alpha - g\right)}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

这里 α 和 β 是三角形 ABP 的两个内角，所以 $0 < \alpha+\beta < \pi$，从而 $\sin(\alpha+\beta) > 0$。此外 $\sin\alpha > 0$。拉紧的绳满足 $T_B \geq 0$，因此

$$\omega^2 x\cos\alpha \geq g,$$

即所求。

情况 $\omega^2 x\cos\alpha = g$

此时 $T_B = 0$：下方的绳刚好拉直，但没有张力。于是方程 (1) 给出

$$T_A = \frac{mg}{\cos\alpha},$$

这与 (2) 一致，因为此时 (2) 给出 $T_A = m\omega^2 x$。另外注意 $\cos\alpha = g/(\omega^2 x) > 0$，所以 α 是锐角。

想一想 一条只涉及 h、d 和 α 的不等式，究竟从何而来?

它来自几何，而不是力学。在三角形 ABP 的顶点 A 处应用余弦定理：

$$d^2 = h^2 + x^2 - 2hx\cos\alpha \quad\Longleftrightarrow\quad x^2 - (2h\cos\alpha)\,x + (h^2 - d^2) = 0.$$

长度 x 是这个二次方程（quadratic equation）的实根，所以其判别式（discriminant）非负：

$$4h^2\cos^2\alpha - 4(h^2 - d^2) \geq 0 \quad\Longleftrightarrow\quad h^2\cos^2\alpha \geq h^2 - d^2.$$

由于 α 是锐角且 $h > d$，$h\cos\alpha$ 和 $\sqrt{h^2-d^2}$ 均为正数，因此可以两边开平方，得

$$h\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}.$$

T_A 的上下界

质点确实不在轴线上，所以 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$，从而 $0 < \cos\alpha < 1$。因此 $T_A = mg/\cos\alpha > mg$。至于另一个界，由上一个结果得 $\cos\alpha \geq \sqrt{h^2 - d^2}/h$，所以

$$mg < T_A = \frac{mg}{\cos\alpha} \leq \frac{mgh}{\sqrt{h^2 - d^2}}.$$

何时取得上界

等号成立需要 $h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}$，即判别式为零，此时二次方程有重根

$$x = h\cos\alpha = \sqrt{h^2 - d^2}.$$

于是 $x^2 + d^2 = h^2$,即 $AP^2 + BP^2 = AB^2$。根据毕氏定理的逆定理(converse of Pythagoras' theorem)，角 APB 是直角：两条绳互相垂直，而 P 位于以 AB 为直径的圆上。换一个说法，AP 是以 B 为圆心、半径为 d 的圆的切线（tangent），这正是 α 在此位置取得最大可能值的原因。在这个位置，$\sin\alpha = d/h$，而 P 位于 B 之上 d^2/h 的高度。对于不等式容许的其他任何锐角 α，都有两个可能的三角形（两个 x 值），而两者在这个位置合而为一。

验算

- 若 ω 非常大，则 $T_B \approx m\omega^2 x\sin\alpha/\sin(\alpha+\beta)$ 以 ω^2 的量级增长，因为此时两条绳都必须提供很大的向心力。
- 在极端位置取 $h = 3$、$d = 2$：$\cos\alpha = \sqrt{5}/3$，$x = \sqrt{5}$，且 $x^2 + d^2 = 5 + 4 = 9 = h^2$。于是 $T_A/(mg) = 3/\sqrt{5} \approx 1.342$，等于 $h/\sqrt{h^2 - d^2}$。
- 以电脑检查多个随机构形，把 T_A 和 T_B 的公式代回向量形式的运动方程，所得残差均为零。

常见错误

- 把圆的半径当成 x，而不是 $x\sin\alpha$。
- 把 T_B 的铅垂方向弄反。由于 β 是从 BA 量起，绳 PB 把 P 向下拉（当 β 是锐角时）。
- 没有先确认两边都是正数，便把不等式两边平方或开平方。

STEP 之外

临界情况 $T_B = 0$ 是一个约束变成*非作用*（inactive）的例子：绳是一种单边约束（one-sided constraint），只能拉、不能推。这类带有不等式约束的问题，在力学和最优化中会

引出带符号条件的拉格朗日（Lagrange）乘数（Lagrange multipliers）。圆锥摆（conical pendulum）及其相关问题，在 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）中有很好的论述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。