详细解答

# STEP III 2014，第 10 题

力学 · 耦合振动

**STEP III 2014，第 10 题**

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q10

本题在 *Beyond STEP* 第 11.2 节简正模式中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/normal-modes.html

## 关键思路

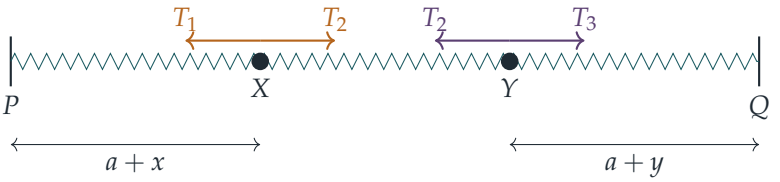
把所有东西放在同一条直线上，只用一个坐标，以 $x$ 和 $y$ 表示每条弹簧的伸长量（extension），然后由牛顿（Newton）第二定律（Newton's second law）得出两条耦合方程（coupled equations）。具有这种对称性的耦合方程，只要相加和相减就可以分离：$x-y$ 和 $x+y$ 各自满足一条简单的简谐方程，而且频率不同。$Y$ 会否回到原处，就取决于这两个频率之比是否有理数（rational）。

## 解答

### 运动方程

把 $X$ 和 $Y$ 视为质点，弹簧视为轻弹簧并遵守胡克定律（Hooke's law）；桌面光滑，所以唯一的水平力就是弹簧的张力（tension）。所有力都沿直线 $PQ$ 作用，运动亦一直在这条直线上。

沿直线从 $P$ 起，以指向 $Q$ 的方向量度位置，于是 $P$ 位于 $0$，$Q$ 位于 $3a$。这样 $X$ 位于 $a+x$，而 $Y$ 位于 $3a-(a+y)=2a-y$。




三条弹簧的长度和张力如下（由胡克定律，张力 $=\lambda\times$ 伸长量$/a$，负值表示推力（thrust））：

$$PX:\ \text{长度}a+x, \qquad T_1=\frac{\lambda x}{a},$$

$$XY:\ \text{长度}(2a-y)-(a+x)=a-x-y, \qquad T_2=-\frac{\lambda(x+y)}{a},$$

$$YQ:\ \text{长度}a+y, \qquad T_3=\frac{\lambda y}{a}.$$

受张力的弹簧会把两端互相拉近。所以 $X$ 受到指向 $P$ 的 $T_1$ 和指向 $Y$ 的 $T_2$；取 $P\to Q$ 方向为正，

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}=-T_1+T_2=-\frac{\lambda}{a}x-\frac{\lambda}{a}(x+y)=-\frac{\lambda}{a}(2x+y),$$

正是所求。（正负号会自动处理好：若 $T_2<0$，弹簧 $XY$ 受压缩，会把 $X$ 推向 $P$。）

至于 $Y$，它的位置是 $2a-y$，所以它在正方向的加速度是 $-\ddot{y}$。它受到指向 $X$ 的 $T_2$（负方向）和指向 $Q$ 的 $T_3$（正方向）：

$$-m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-T_2+T_3=\frac{\lambda}{a}(x+y)+\frac{\lambda}{a}y, \qquad \text{所以} \qquad m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}=-\frac{\lambda}{a}(x+2y).$$

这就是把第一条方程中的 $x$ 和 $y$ 互换，正如装置的对称性（对 $PQ$ 的中点作反射）所要求的一样。

**组合 $x-y$**

把两条方程相减，

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y)=-\frac{\lambda}{a}\left[(2x+y)-(x+2y)\right]=-\frac{\lambda}{a}(x-y).$$

设 $\omega^2=\lambda/(ma)$，上式就是 $\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x-y)=-\omega^2(x-y)$，即简谐运动（simple harmonic motion），所以

$$x-y=A\cos\omega t+B\sin\omega t.$$

起初 $XP=a$ 而 $YQ=\frac{1}{2}a$，所以在 $t=0$ 时 $x=0$、$y=-\frac{1}{2}a$，得 $x-y=\frac{1}{2}a$，因此 $A=\frac{1}{2}a$。两质点由静止释放，所以在 $t=0$ 时 $\dot{x}=\dot{y}=0$；求导后得 $\omega B=0$，所以 $B=0$。因此

$$x-y=\tfrac{1}{2}a\cos\omega t.$$

### 组合 $x+y$

改为把两条方程相加，

$$m\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y)=-\frac{\lambda}{a}(3x+3y),\qquad \text{所以}\qquad \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}(x+y)=-3\omega^2(x+y).$$

这是角频率（angular frequency）为 $\sqrt{3}\,\omega$ 的简谐运动，所以 $x+y=C\cos\sqrt{3}\,\omega t+D\sin\sqrt{3}\,\omega t$。在 $t=0$ 时，$x+y=-\frac{1}{2}a$ 且其导数为 0，所以 $C=-\frac{1}{2}a$、$D=0$：

$$x+y=-\tfrac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t.$$

### $Y$ 永不回到原处

取两个结果之差的一半，得

$$y=\tfrac{1}{2}\big[(x+y)-(x-y)\big]=-\tfrac{1}{4}a\big(\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t\big).$$

（同理 $x=\frac{1}{4}a(\cos\omega t-\cos\sqrt{3}\,\omega t)$。）$Y$ 回到初始位置，当且仅当 $y=-\frac{1}{2}a$，即

$$\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t=2.$$

> ? **想一想** 两个余弦函数都是周期函数，那么它们终究总会再次对齐吧?

每个余弦值最多是 1，所以两者之和等于 2 只有在某一时刻 $t>0$ 两者同时等于 1 时才会发生。这需要

$$\omega t=2\pi n\quad\text{及}\quad\sqrt{3}\,\omega t=2\pi k$$

其中 $n,k$ 为整数，且因 $t>0$ 而有 $n\geq 1$。两式相除，$\sqrt{3}=k/n$ 便会是有理数，但它并不是。所以不存在这样的 $t>0$，$Y$ 永远不会回到初始位置。两个周期 $2\pi/\omega$ 和 $2\pi/(\sqrt{3}\,\omega)$ 是不可公度（incommensurable）的，所以两个振动永远不会再次同步，尽管它们可以任意接近同步。

## 验算

- 在 $t=0$ 时，公式给出 $x=\frac{1}{4}a(1-1)=0$ 及 $y=-\frac{1}{4}a(1+1)=-\frac{1}{2}a$，与起始位置吻合，而且两个导数在该处都等于零。
- 弹簧 $XY$ 的长度是 $a-x-y=a+\frac{1}{2}a\cos\sqrt{3}\,\omega t$，一直介乎 $\frac{1}{2}a$ 与 $\frac{3}{2}a$ 之间，所以两质点永不相撞；同样 $PX=a+x\geq\frac{1}{2}a$ 及 $YQ=a+y\geq\frac{1}{2}a$。整个过程中模型在物理上都合理。
- 取 $m=a=1$、$\lambda=2$ 以数值方法逐步模拟运动，直至 $t=20$，结果与 $x$ 和 $y$ 的公式相差少于 $10^{-10}$。以电脑在 $0<\omega t\leq 20\,000$ 范围内搜索，发现 $\cos\omega t+\cos\sqrt{3}\,\omega t$ 最接近 2 时可达 1.999995，但从未到达 2。

## 常见错误

- 弄错 $Y$ 方程的正负号：$y$ 是从 $Q$ 起量度的，所以 $y$ 增加会使 $Y$ 向负方向移动。
- 把 $XY$ 的长度写成 $a+x+y$ 而不是 $a-x-y$；$x$ 和 $y$ 增加都会令中间的弹簧变短。
- 只论证两个周期不同。单是周期不同并不足够（周期 1 和 2 在 $t=2$ 时会再次对齐）；关键在于两者之比 $\sqrt{3}$ 是无理数（irrational）。

## STEP 之外

组合 $x-y$ 和 $x+y$ 是这个系统的简正模（normal modes）：它们是矩阵 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ 的特征向量（eigenvectors），对应的特征值（eigenvalues）1 和 3 给出频率的平方 $\omega^2$ 和 $3\omega^2$。耦合系统的每个微小振动都可以这样分解为简正模，而只有当所有频率之比都是有理数时，运动才是周期的；否则运动是准周期（quasi-periodic）的，永不重复，但会任意接近其起点。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）讲述耦合振子，而 Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）则解释背后的特征向量方法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。