详细解答

STEP III 2014，第 1 题

纯数学 · 对数级数展开

STEP III 2014，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s3-q1

关键思路

三次多项式（cubic）$1+qx^2+rx^3$ 可因式分解为 $(1+ax)(1+bx)(1+cx)$，因此它的对数（logarithm）可拆成三个对数之和，而每个对数的级数（series）我们都已知道。这样便能以 a、b、c 表示 x^n 的系数（coefficient）。我们亦可把同一个对数直接展开为 $\ln(1+u)$，其中 $u=qx^2+rx^3$，从而以 q 和 r 表示各系数。比较这两个展开式，便可把关于 q 和 r 的事实转化为各 S_n 之间的恒等式（identity）。

解答

展开得

$$(1+ax)(1+bx)(1+cx)=1+(a+b+c)x+(ab+bc+ca)x^2+abc\,x^3.$$

由于 $a+b+c=0$，x 项消失。两个对所有实数 x 都相等的多项式，其系数必然相等，因此把 x^2 和 x^3 的系数与 $1+qx^2+rx^3$ 比较，得

$$q=bc+ca+ab,\qquad r=abc,$$

此即所求。

第 (i) 部分

当 $|x|$ 足够小（具体而言，$|x|<1/\max(|a|,|b|,|c|)$；若 $a=b=c=0$，则任何 x 皆可），每个因子都是正数，而每个对数都有收敛（convergent）的级数。利用 $|t|<1$ 时

$\ln(1+t) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}t^n/n$，

$$\begin{aligned}\ln(1+qx^2+rx^3) &= \ln(1+ax)+\ln(1+bx)+\ln(1+cx)\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{b^nx^n}{n}+\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{c^nx^n}{n}\\ &= \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{a^n+b^n+c^n}{n}x^n.\end{aligned}$$

所以 x^n 的系数是 $(-1)^{n+1}S_n$，此即所求。（当 $n=1$ 时，这是 $S_1 = a+b+c = 0$，与没有 x 项的事实吻合。）

第 (ii) 部分

现在用第二种方法展开同一个函数。设 $u = qx^2+rx^3$，则

$$\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}-\frac{u^4}{4}+\cdots.$$

u 的每一项次数至少为 2，所以 u^k 只涉及 x^{2k} 至 x^{3k} 的幂。要求 x^n 的系数，只需考虑满足 $2k\leq n\leq 3k$ 的 u^k：

$$\begin{aligned}u &= qx^2+rx^3,\\ u^2 &= q^2x^4+2qr\,x^5+r^2x^6.\end{aligned}$$

因此：

- x^2：只有 u 有贡献，得 q；
- x^3：只有 u 有贡献，得 r；
- x^5：只有 $-\frac{1}{2}u^2$ 有贡献，得 $-\frac{1}{2}(2qr) = -qr$。

与第 (i) 部分比较，该处的系数分别是 $-S_2$、S_3 和 S_5，故

$$S_2 = -q, \qquad S_3 = r, \qquad S_5 = -qr.$$

因此 $S_2S_3 = (-q)(r) = -qr = S_5$，此即所求。

想一想 为甚么我们可以比较同一个函数的两个不同级数的系数?

两个展开式都是 x 的幂级数（power series），并在 0 附近的某个区间上收敛至 $\ln(1+qx^2+rx^3)$。在 0 附近收敛的幂级数，其系数是唯一的（它们就是函数在 0 处的导数除以 $n!$，正如麦克劳林定理（Maclaurin's theorem）所述），因此两组系数必然相同。

第 (iii) 部分

对于 x^7，我们需要 $2k \le 7 \le 3k$，这迫使 $k = 3$。用二项式定理（binomial theorem）展开 $u^3 = (qx^2 + rx^3)^3$，

$$u^3 = q^3x^6 + 3q^2r\,x^7 + 3qr^2x^8 + r^3x^9,$$

所以 $\ln(1+u)$ 中 x^7 的系数是 $\frac{1}{3} \cdot 3q^2r = q^2r$。由第 (i) 部分，该系数是 $(-1)^8 S_7 = S_7$，所以 $S_7 = q^2r$。利用第 (ii) 部分，

$$S_2S_5 = (-q)(-qr) = q^2r = S_7,$$

此即所求。

第 (iv) 部分

对于 x^9，我们需要 $2k \le 9 \le 3k$，所以 $k = 3$ 或 $k = 4$。

- 来自 $\frac{1}{3}u^3$：u^3 的 x^9 项是 r^3x^9，得 $\frac{1}{3}r^3$。
- 来自 $-\frac{1}{4}u^4$：在 $(qx^2 + rx^3)^4$ 中，x^9 项需要三个 qx^2 因子和一个 rx^3 因子，得 $\binom{4}{1}q^3r\,x^9 = 4q^3r\,x^9$。这贡献 $-q^3r$。

所以 x^9 的系数是 $\frac{1}{3}r^3 - q^3r$，而由第 (i) 部分，它等于 $(-1)^{10}S_9 = S_9$。另一方面，

$$S_2S_7 = (-q)(q^2r) = -q^3r.$$

因此

$$S_9 - S_2S_7 = \tfrac{1}{3}r^3 = \tfrac{1}{3}(abc)^3,$$

而命题 $S_2S_7 = S_9$ 成立当且仅当 $abc = 0$。一般而言它并不成立。

举一个具体的反例（counterexample），取 $a = b = 1$、$c = -2$（于是 $a + b + c = 0$ 且 $abc = -2 \ne 0$）。则

$$S_2 = \frac{1+1+4}{2} = 3, \qquad S_7 = \frac{1+1-128}{7} = -18, \qquad S_9 = \frac{1+1-512}{9} = -\frac{170}{3},$$

所以 $S_2S_7 = -54 \ne -\frac{170}{3} = S_9$。命题不成立。

想一想 第 (ii) 和 (iii) 部分都行得通，为甚么规律到了 x^9 就失效?

对于 x^5 和 x^7，只有一个 u 的幂有贡献，所以每个系数都是 q 和 r 的单一乘积，而这乘积恰好能分解为适当的前面几个 S 的乘积。到了 x^9，有两个 u 的幂作出贡献，而来自 u^3 的额外 r^3 项破坏了这种分解。

验算

- 取 $a = b = 1$、$c = -2$，则 $q = -3$、$r = -2$。于是 $S_2 = 3 = -q$，$S_3 = (1+1-8)/3 = -2 = r$，$S_5 = (1+1-32)/5 = -6 = -qr$，所以 $S_2S_3 = S_5$。此外 $S_7 = -18 = q^2r$，而 $S_9 - S_2S_7 = -\frac{170}{3} + 54 = -\frac{8}{3} = \frac{1}{3}r^3$，与预测完全一致。
- 若 $c = 0$（于是 $b = -a$），所有奇数下标的 S_n 都等于零，(iv) 中命题的两边都是 0，与命题在 $abc = 0$ 时成立一致。
- (ii) 至 (iv) 的恒等式以及 $S_9 - S_2S_7$ 的公式，亦已用电脑以精确算术，对 200 组随机选取的有理数 a 和 b 验证。

常见错误

- 遗漏 u^4 对 x^9 的贡献：很容易只考虑到 u^3 便停下，得出错误的系数 $\frac{1}{3}r^3$。
- $(-1)^{n+1}$ 引起的符号错误：x^2 的系数是 $-S_2$，所以 $S_2 = -q$，而不是 q。
- 忘记二项式系数：u^3 的 x^7 项是 $3q^2r$，而不是 q^2r。

STEP 之外

各 S_n（除了因子 $1/n$ 之外）就是三次多项式各根的幂和（power sums），而 q、r 则是它的基本对称多项式（elementary symmetric polynomials）。取对数再比较系数，是牛顿恒等式（Newton's identities）的一个生成函数（generating function）证明；牛顿恒等式把每个幂和以基本对称多项式表示，而其背后的定理是：每个对称多项式都可以用基本对称多项式表示。关于对称多项式和多项式的根，可参阅 Allenby 的 *Rings, Fields and Groups*（《环、域与群》）；若想多做以级数为题材、STEP 风格的练习，可参阅 Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。