详细解答

STEP II 2014，第 9 题

力学 • 刚体平衡

STEP II 2014，第 9 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q9

关键思路

未知的力有三个（张力（tension）、法向反作用力（normal reaction）和 A 处的摩擦力（friction）），而方程也有三条：水平方向分解、铅垂方向分解，以及取力矩（moments）。关于角 A 取力矩是聪明的选择，因为墙壁施加的两个接触力都作用于该点，因而在方程中消去，只剩下一条把张力和重量联系起来的方程。得到这条方程后，摩擦力的方向就只取决于单靠绳子所支撑的力比重量大还是小。

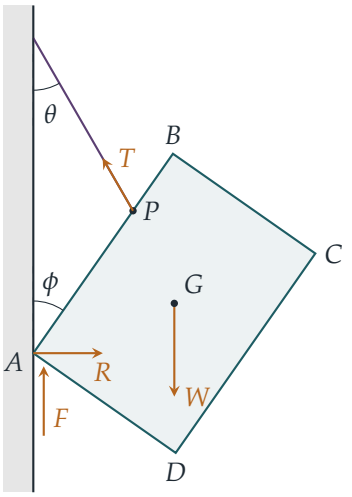
解答

我们把薄板（lamina）模型化为重量 W 的均匀刚体（uniform rigid body），其质心（centre of mass）G 位于长方形的中心；绳子则视为轻而不可伸长（light and inextensible），所以沿绳的张力 T 处处相同。在 A 处，墙壁施加一个法向反作用力 R（水平方向，背离墙壁）及一个摩擦力 F（铅垂方向）。我们规定 F 以向上为正，所以若 F 为负，即表示摩擦力实际上向下作用。

设坐标轴，以 A 为原点，x 轴水平背离墙壁，y 轴铅垂向上。边 AB 与向上的铅垂线成角 ϕ，所以沿 AB 的单位向量是 $(\sin\phi, \cos\phi)$。边 AD 与之垂直，并指向背离墙壁的方向，所以其单位向量是 $(\cos\phi, -\sin\phi)$。因此

$$G = b(\sin\phi, \cos\phi) + a(\cos\phi, -\sin\phi), \qquad P = d(\sin\phi, \cos\phi),$$

其中 P 是系绳之点。绳子由 P 向上连到墙壁，与向下的铅垂线成角 θ，所以作用于薄板的张力是 $T(-\sin\theta, \cos\theta)$。



第 (i) 部分

沿水平及铅垂方向分解，

$$R = T\sin\theta,$$
$$F + T\cos\theta = W.$$

关于 A 取力矩时，R 和 F 没有贡献。一个作用于 (x,y) 的力 (f_x, f_y) 的逆时针力矩是 $xf_y - yf_x$。对于作用于 P 的张力，这是

$$d\sin\phi \cdot T\cos\theta - d\cos\phi \cdot (-T\sin\theta) = Td\sin(\theta+\phi),$$

而对于作用于 G 的重量 $(0,-W)$，则是 $-W(a\cos\phi + b\sin\phi)$。所以

$$Td\sin(\theta+\phi) = W(a\cos\phi + b\sin\phi). \tag{1}$$

量 $a\cos\phi + b\sin\phi$ 其实就是 G 与墙壁的水平距离，这是看出重量力矩的快捷方法。

在摩擦力向上的极限平衡（limiting equilibrium）中，$F = \mu R = \mu T\sin\theta$，所以铅垂方向的方程变成

$$T(\cos\theta + \mu\sin\theta) = W.$$

把 W 代入 (1)，并约去 T（由于绳子拉紧，它是正数），得

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta + \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

这就是 $(*)$。

第 (ii) 部分

若摩擦力达到极限并向下作用，则 $F = -\mu R = -\mu T\sin\theta$，而铅垂方向的方程是 $T(\cos\theta - \mu\sin\theta) = W$。其余一切不变，所以 $(*)$ 变成

$$d\sin(\theta+\phi) = (\cos\theta - \mu\sin\theta)(a\cos\phi + b\sin\phi);$$

即是把 μ 换成 $-\mu$。

第 (iii) 部分

现在我们不假设摩擦力达到极限。方程 (1) 在任何平衡状态下都成立，并给出

$$T = \frac{W(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)},$$

而由于 θ 和 ϕ 都是锐角，所以 $\sin(\theta+\phi) > 0$。铅垂方向的方程于是给出

$$F = W - T\cos\theta = W\left(1 - \frac{\cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)}{d\sin(\theta+\phi)}\right).$$

想一想 怎样把“$F > 0$”转化为只涉及正切的条件?

摩擦力向上作用，当且仅当 $F > 0$，即是当且仅当

$$d\sin(\theta+\phi) > \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi),$$

因为 $d\sin(\theta+\phi) > 0$。展开 $\sin(\theta+\phi) = \sin\theta\cos\phi + \cos\theta\sin\phi$，并把两边除以 $\cos\theta\cos\phi$；由于两个角都是锐角，这个数是正数，所以不等式方向不变：

$$d(\tan\theta + \tan\phi) > a + b\tan\phi.$$

由于 $\tan\theta + \tan\phi > 0$，充分必要条件是

$$d > \frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi}.$$

（当 d 等于这个值时，完全没有摩擦力；当 d 较小时，摩擦力向下作用。）

从物理上看，绳子系在边 AB 上，所以 $d \le 2b$。若条件成立，则

$$\frac{a + b\tan\phi}{\tan\theta + \tan\phi} < d \le 2b,$$

所以 $a + b\tan\phi < 2b\tan\theta + 2b\tan\phi$，即 $a < b(2\tan\theta + \tan\phi)$。取逆否命题（contrapositive）：若 $b(2\tan\theta + \tan\phi) < a$，则系绳点无论放在任何容许的位置，都不能使摩擦力向上作用，所以该条件不可能成立。证明完毕。

验算

- 当 $\mu = 0$ 时墙壁光滑，$(*)$ 与其第 (ii) 部分的版本重合，理应如此。两者都化为第 (iii) 部分的临界情况 $d\sin(\theta+\phi) = \cos\theta\,(a\cos\phi + b\sin\phi)$。
- 薄板的 AB 铅垂时（$\phi \to 0$）：临界情况变成 $d\tan\theta = a$。这表示绳子的作用线（line of action）通过经过 G 的铅垂线，该线与墙壁的水平距离为 a。这时单靠绳子和重量便能互相平衡，墙壁只需施加水平推力。
- 数值上，取 $a = 1$、$b = 1.5$、$\theta = 30°$、$\phi = 40°$：临界值是 $d \approx (1 + 1.259)/(0.577 + 0.839) \approx 1.595 < 3 = 2b$。改为关于 G 而非 A 取力矩，直接解三条平衡方程，得出在略高于此值时 $F > 0$，略低于此值时 $F < 0$。用电脑检验数千个随机配置，证实了 $(*)$、其第 (ii) 部分的形式，以及 (iii) 中的条件。

常见错误

- 关于 P 或 G 取力矩：这样做可行，但会把 R 和 F 带进力矩方程，令代数运算繁复得多。
- 弄错 G 的位置：D 位于背离墙壁的一侧，所以 AD 沿 $(\cos\phi, -\sin\phi)$ 方向，而 G 与墙壁的水平距离是 $a\cos\phi + b\sin\phi$。
- 在最后一部分忘记约束条件 $d \le 2b$；这是 AB 的长度唯一出现的地方。

STEP 之外

这是一个小型的静定（statically determinate）问题：平面上的刚体有三个未知的力和三条独立的平衡方程。工程师首先就会核对这个数目；若支撑点更多，单靠静力学便无法求出各力，还需要知道物体如何变形。关于未知力的作用点取力矩这个技巧，是巧妙选取力矩原点的平面版本。如欲深入了解，可参阅 Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。