详细解答

STEP II 2014，第 8 题

纯数学 · 最大二项式系数

STEP II 2014，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q8

关键思路

要找出一个正项数列（sequence）在哪里达到最大值，可以把每一项与下一项比较：考虑比值（ratio）c_{r+1}/c_r。对二项式展开（binomial expansion）而言，这个比值是 r 的一个简单分式，而且稳定递减，所以当它大于 1 时系数（coefficient）上升，一旦小于 1 系数便下降。最大的系数就在比值越过 1 的位置，而之后各部分都只需读出某个式子的整数部分（integer part）。

解答

系数及其比值

由二项式定理（binomial theorem），

$$c_r = \binom{n}{r} a^{n-r} b^r, \qquad 0 \le r \le n.$$

由于 $a, b > 0$，这些系数全部是正数。对 $0 \le r \le n-1$，

$$\frac{c_{r+1}}{c_r} = \frac{\binom{n}{r+1}}{\binom{n}{r}} \cdot \frac{b}{a} = \frac{(n-r)\,b}{(r+1)\,a},$$

这里用了 $\binom{n}{r+1} = \binom{n}{r}\frac{n-r}{r+1}$。记

$$L = \frac{b(n+1)}{a+b}.$$

因为 $(r+1)a > 0$，

$$c_{r+1} \ge c_r \iff (n-r)b \ge (r+1)a \iff nb - a \ge r(a+b)$$
$$\iff r \le \frac{nb-a}{a+b} = \frac{b(n+1)}{a+b} - 1 = L - 1,$$

而把各处换成 $=$ 后，同一串推导依然成立。因此

$$c_{r+1} > c_r \text{ 若} r < L-1, \qquad c_{r+1} = c_r \text{ 若} r = L-1, \qquad c_{r+1} < c_r \text{ 若} r > L-1. \qquad (*)$$

m 的上下界

上界（*upper bound*）。若 $m = 0$，由于 $L > 0$，有 $m \le L$。若 $m \ge 1$，由于 c_m 最大，有 $c_m \ge c_{m-1}$，再由 $(*)$ 取 $r = m-1$，得 $m - 1 \le L - 1$，即 $m \le L$。

下界（*lower bound*）。若 $m = n$，由于 $L < n+1$（因为 $\frac{b}{a+b} < 1$），有 $m \ge L - 1$。若 $m \le n-1$，则 $c_m \ge c_{m+1}$，由 $(*)$ 取 $r = m$，便迫使 $m \ge L - 1$。

所以在所有情况下都有

$$\frac{b(n+1)}{a+b} - 1 \le m \le \frac{b(n+1)}{a+b},$$

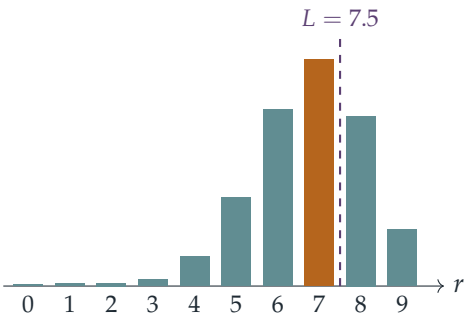
正是所求。

> **想一想** 为甚么 m 不可能有三个值，或者有两个不相邻的值?

区间 $[L-1, L]$ 的长度是 1。若 L 不是整数，这个区间恰好包含一个整数 $\lfloor L \rfloor$，所以 m 是唯一的。若 L 是整数，区间恰好包含两个相邻整数 $L-1$ 和 L，所以 m 是其中之一。（事实上，由 $(*)$ 取 $r = L-1$ 可见 $c_{L-1} = c_L$，所以两者确实都是最大的。）无论哪种情况，唯一的那个值，或两个值中较大者，都是

$$G(n,a,b) = \left\lfloor \frac{b(n+1)}{a+b} \right\rfloor.$$

从此以后，我们只需要这条公式。



按比例绘画的 $(1+3x)^9$ 各项系数：当 $r < L - 1 = 6.5$ 时系数上升，之后下降，在 $r = 7$ 处达到最大。

第 (i) 部分

对 $(n,a,b) = (9,1,3)$，$L = \frac{3\times 10}{4} = 7.5$，所以 $G(9,1,3) = 7$。

对 $(n,a,b)=(9,2,3)$，$L=\frac{3\times10}{5}=6$ 是整数，所以最大系数同时出现在 $r=5$ 和 $r=6$，而 $G(9,2,3)=6$。（验证：$c_5=126\cdot2^4\cdot3^5=489\,888=84\cdot2^3\cdot3^6=c_6$。）

第 (ii) 部分

当 $a=b$ 时，$L=\frac{n+1}{2}$。

- $n=2k$：$L=k+\frac{1}{2}$，所以 $G(2k,a,a)=k$（即中间的系数，是唯一的）。
- $n=2k-1$：$L=k$ 是整数，所以中间两个系数 $r=k-1$ 和 $r=k$ 相等，而 $G(2k-1,a,a)=k$。

这与帕斯卡三角形（Pascal's triangle）各行的对称性（symmetry）吻合。

第 (iii) 部分

固定 n 和 b 时，$L=\frac{b(n+1)}{a+b}$ 是 a 的递减函数（decreasing function），所以 $\lfloor L\rfloor$ 是 a 的非递增函数（non-increasing function）。因此在正整数范围内，它在 $a=1$ 时最大，此时 $G(n,1,b)=\left\lfloor\frac{b(n+1)}{b+1}\right\rfloor$。（其他 a 值可能与之相等，但没有一个比它更大。）

第 (iv) 部分

现在

$$\frac{b(n+1)}{b+1}=(n+1)-\frac{n+1}{b+1}.$$

由于 $\frac{n+1}{b+1}>0$，此式小于 $n+1$，所以 $G(n,1,b)\le n$。（这亦可由 $m\le n$ 得出。）此外，

$$G(n,1,b)=n\iff(n+1)-\frac{n+1}{b+1}\ge n\iff\frac{n+1}{b+1}\le1\iff b\ge n.$$

所以 $G(n,1,b)$ 的最大可能值是 n，而且恰好在 $b\ge n$ 时达到。当 $b=n$ 时，最后两个系数相等，因为 $c_{n-1}=n\cdot b^{n-1}=b^n=c_n$；当 $b>n$ 时，最后一个系数 b^n 是唯一的最大者。

验算

- $(1+3x)^9$ 的系数是 $1,27,324,2268,10206,30618,61236,78732,59049,19683$：最大者在 $r=7$，与 (i) 的结果一致。
- 对 $(1+x)^4$ $(n=2k,\ k=2)$，系数 $1,4,6,4,1$ 在 $r=2=k$ 处最大；对 $(1+x)^3$ $(k=2)$，系数是 $1,3,3,1$，在 $r=1,2$ 处相等，较大的值是 $2=k$。
- 在 (iv) 中取 $n=3$：$(1+2x)^3$ 的系数是 $1,6,12,8$，在 $r=2$ 处最大；$(1+3x)^3$ 的系数是 $1,9,27,27$，所以当 $b=3$ 时便达到 $G=3$。

- 用电脑对所有 $n < 30$ 及 $a, b < 15$ 验证 $G(n,a,b) = \lfloor b(n+1)/(a+b) \rfloor$，每一种情况都吻合。

常见错误

- 证明上下界时忘记处理端点情况 $m = 0$ 和 $m = n$：此时并没有 c_{-1} 或 c_{n+1} 可供比较。
- 当 L 是整数时，取了两个相等值中较小的一个：G 定义为较大者，所以 $G(9,2,3) = 6$，而不是 5。
- 在 (iv) 中只答 $b = n$：其实每个 $b \geq n$ 都给出 $G = n$。

STEP 之外

这里所用的比值检验，即比较相邻两项，与判断级数（series）收敛（convergence）的比值检验法（ratio test）是同一个想法；它亦可找出二项分布（binomial distribution）$\mathrm{B}(n,p)$（其中 $p = \frac{b}{a+b}$）的众数（mode）：众数是 $\lfloor (n+1)p \rfloor$。像二项式系数这样先升后降的数列称为单峰（unimodal）数列，而证明这一点的常用工具是对数凹性（log-concavity）（$c_r^2 \geq c_{r-1}c_{r+1}$）。概率方面的内容，可参阅 Grimmett 和 Welsh 的 *Probability: An Introduction*（《概率导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。