详细解答

STEP II 2014，第 7 题

纯数学 · 绝对值函数的图像

> **STEP II 2014，第 7 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q7

关键思路

若干绝对值函数（modulus function）之和是分段线性（piecewise linear）的：只有在其中某个绝对值内的式子等于零的点，斜率（gradient）才会改变。因此 $|x-a|+|x-b|$ 的图像是一个“浴缸”：在 a 与 b 之间是平坦的底部，两旁是斜率为 ± 2 的缸壁。之后各条方程的解的个数，就归结为比较斜率：斜率为 2 的图像必定会追上斜率为 1 的图像，而两个斜率相同的图像要么重合，要么永不相交。

解答

全文设 $f(x)=|x-a|+|x-b|$，其中 $a<b$。

第 (i) 部分

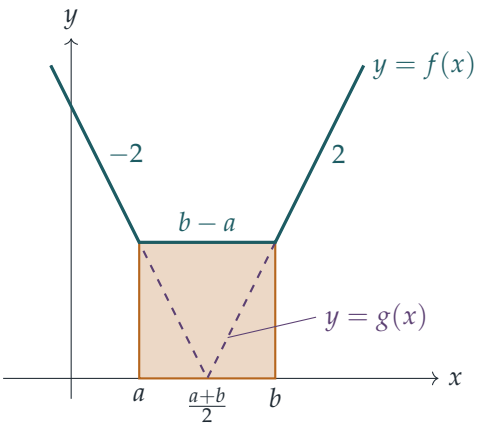
逐个区间去掉绝对值符号：

$$f(x)=\begin{cases} a+b-2x, & x\le a,\\ b-a, & a\le x\le b,\\ 2x-a-b, & x\ge b. \end{cases}$$

所以当 $x<a$ 时斜率为 -2，当 $a<x<b$ 时为 0，当 $x>b$ 时为 2。图像是连续（continuous）的，在 $[a,b]$ 上方有一段高度为 $b-a$ 的平坦底部。

$g(x)=|2x-a-b|=2|x-\frac{a+b}{2}|$ 的图像是一个 V 形，顶点在 $(\frac{a+b}{2},0)$，斜率为 ± 2。当 $x\ge b$ 时，$2x-a-b\ge b-a>0$，所以 $g(x)=2x-a-b=f(x)$；同理，当 $x\le a$ 时 $g(x)=a+b-2x=f(x)$。因此两个图像在 (a,b) 以外重合。在区间内，g 下降至 0，而

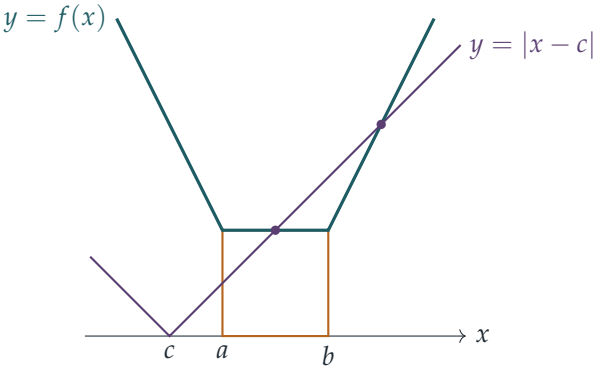
f 则保持在 $b-a$。（事实上 $f(x)=\max\{b-a,\, g(x)\}$。）



利用 $f(a)=f(b)=b-a$，可知该四边形的顶点为 $(a,0)$、$(b,0)$、$(b,b-a)$ 和 $(a,b-a)$。它的底边长 $b-a$，两条铅垂边长 $b-a$，而且所有角都是直角。所以它是一个边长为 $b-a$ 的**正方形**（square）。另外留意，由于 $g(a)=g(b)=b-a$，g 的 V 形从正方形底边的中点出发，向上穿过它的两个上方顶点。

第 (ii) 部分

现在比较 $y=f(x)$ 与 $y=|x-c|$；后者是一个顶点 $(c,0)$ 在 x 轴上、两臂斜率为 ±1 的 V 形。关键事实是 f 恒不小于 $b-a>0$，而且它的缸壁（斜率 ±2）比 V 形的两臂陡。草图显示 $c<a$ 的情况，此时 V 形与浴缸相交两次。



情况 $a<c<b$：无解。在 $[a,b]$ 上，距离 $|x-c|$ 至多为 $\max\{c-a,\, b-c\}<b-a=f(x)$，所以 V 形严格位于浴缸底部之下。当 $x\geq b$ 时，

$$f(x)-|x-c|=(2x-a-b)-(x-c)=x-b+(c-a)\geq c-a>0,$$

而同样的论证（或下文的对称性（symmetry））可处理 $x \le a$ 的情况。所以 V 形完全处于浴缸之内，方程无解。

情况 $c = a$ 或 $c = b$：一个解。取 $c = a$。在 $[a, b]$ 上，$|x - a| = x - a \le b - a$，等号只在 $x = b$ 时成立。当 $x > b$ 时，$f(x) - (x - a) = x - b > 0$；当 $x < a$ 时，$f(x) - (a - x) = b - x > 0$。所以唯一的解是 $x = b$：V 形的右臂恰好穿过正方形的上方顶点 $(b, b - a)$。同理，当 $c = b$ 时唯一的解是 $x = a$。

情况 $c < a$：两个解。左臂 $y = c - x$ 位于 $x \le c < a$ 的范围，而 f 在该处的斜率为 -2。在 $x = c$ 处有 $f(c) > 0 = c - c$，而向左移动时 f 上升得比左臂快，所以对所有 $x \le c$ 都有 $f(x) > c - x$。左臂不给出任何解。

至于右臂 $y = x - c$（$x \ge c$），设 $k(x) = f(x) - (x - c)$。把 f 的各段斜率减去 1，可知 k 在 (c, a) 上斜率为 -3，在 (a, b) 上为 -1，当 $x > b$ 时为 $+1$。所以 k 在 $[c, b]$ 上严格递减（strictly decreasing），在 $[b, \infty)$ 上严格递增。此外

$$k(c) = f(c) > 0, \qquad k(b) = (b - a) - (b - c) = c - a < 0, \qquad k(x) \to \infty \text{ 当} x \to \infty.$$

因此 k 在 (c, b) 内恰有一个零点，在 (b, ∞) 内也恰有一个零点。具体而言，它们是

$$x = a + b - c \quad \text{及} \quad x = \begin{cases} b - a + c, & 2a - b \le c < a, \\ \frac{1}{3}(a + b + c), & c < 2a - b, \end{cases}$$

其中第二个解分别落在浴缸的底部或其左壁上。

情况 $c > b$：两个解。关于直线 $x = \frac{a+b}{2}$ 的反射（reflection）$x \mapsto a + b - x$ 使 f 保持不变（它把 $|x - a|$ 与 $|x - b|$ 互换），并把 $|x - c|$ 变为 $|x - c'|$，其中 $c' = a + b - c < a$。所以这个情况是上一个情况的镜像。

总结：若 $a < c < b$，则有 0 个解；若 $c = a$ 或 $c = b$，则有 1 个解；若 $c < a$ 或 $c > b$，则有 2 个解。

第 (iii) 部分

设 $F(x) = |x - c| + |x - d|$。由第 (i) 部分，F 是第二个浴缸，在 $[c, d]$ 上方的底部高度为 $d - c$，缸壁斜率为 ± 2。由于 $d - c < b - a$，它的底部比 f 的更低也更窄。记

$$m = \tfrac{1}{2}(a + b), \qquad n = \tfrac{1}{2}(c + d)$$

为两个底部的中点，并设 $h(x) = f(x) - F(x)$。

在最左方（当 $x \le \min\{a, c\}$ 时），两个图像都在各自的左壁上，所以 $h(x) = (a + b - 2x) - (c + d - 2x) = 2(m - n)$。在最右方（当 $x \ge \max\{b, d\}$ 时），$h(x) = 2(n - m)$。在两者之间，h 是连续且分段线性的。

想一想 两个图像能否共有一整段线段，从而给出无限多个解?

只有在两者斜率相同的地方才有可能。两个底部都是平的，但它们处于不同高度 $b-a \neq d-c$，所以不会重叠。除此之外，斜率只在两个图像都位于左壁（$x < \min\{a,c\}$）或都位于右壁（$x > \max\{b,d\}$）时才相同，而在这些地方 $h = \pm 2(m-n)$。所以两个图像共有一段线段，当且仅当 $m = n$。

情况 $a+b=c+d$：无限多个解。此时当 $x \leq \min\{a,c\}$ 及 $x \geq \max\{b,d\}$ 时 $h = 0$。由于 $d-c < b-a$ 而两个中点相同，有 $a < c < d < b$：小浴缸正好位于大浴缸的中央。当 $c \leq x \leq b$ 时，F 的图像在其底部或右壁上，所以 $F(x) \leq 2b-c-d = b-a = f(x)$，等号只在 $x = b$ 时成立。由对称性，在 $[a,d]$ 上亦然。所以解集恰好是 $x \leq a$ 连同 $x \geq b$。

情况 $a+b < c+d$：恰有一个解。此时在最左方 $h = 2(m-n) < 0$，在最右方 $h = 2(n-m) > 0$。h 在哪里会递减？这需要 f 的斜率小于 F 的斜率，有两种可能。

- f 在其左壁上而 F 不在，这需要 $c < x < a$。于是 $c < a$，又由于 $d-c < b-a$，亦有 $d < b$，从而 $c+d < a+b$，但这在此情况下不成立。
- f 在其底部而 F 在其右壁上，这需要 $d < x < b$。

所以 h 在 $(-\infty, d]$ 上是非递减的。在 $[d,\infty)$ 上，h 在 $[d,b]$ 上非递增（若 $d < b$），然后当 $x \geq \max\{b,d\}$ 时恒等于 $2(n-m)$。所以对所有 $x \geq d$ 都有 $h(x) \geq 2(n-m) > 0$。在 $(-\infty, d]$ 上，h 从值 $2(m-n) < 0$ 不递减地上升至 $h(d) > 0$，而且（由上面方框的讨论）它不会在任何区间上恒等于零。所以 h 在该处恰有一个零点。总共恰有一个解。

情况 $a+b > c+d$：恰有一个解，可由反射 $x \mapsto -x$ 得出；这个反射把 a,b,c,d 换成 $-b,-a,-d,-c$，并使两个和之间的不等式反向。

总结：在 $a < b$、$c < d$ 及 $d-c < b-a$ 的条件下，若 $a+b = c+d$（两个区间的中点相同），则有无限多个解，即所有 $x \leq a$ 及所有 $x \geq b$。否则恰有一个解。

验算

- 第 (ii) 部分取 $a = 1$、$b = 3$、$c = 0$：解 $x = a+b-c = 4$ 及 $x = b-a+c = 2$ 分别给出 $|3|+|1| = 4$ 及 $1+1 = 2$，符合要求。取 $c = -5$ 时，第二个解是 $\frac{1}{3}(1+3-5) = -\frac{1}{3}$，而确实 $\frac{4}{3}+\frac{10}{3} = \frac{14}{3} = |-\frac{1}{3}+5|$。
- 第 (iii) 部分取 $a = 0$、$b = 10$、$c = 6$、$d = 7$：h 在最左方为 -3，在 $[6,7]$ 上升至 9，然后回落至 3 并保持不变。它唯一的零点是 $x = \frac{3}{2}$，此时两边都等于 10。
- 以电脑对数以万计随机选取的整数 a,b,c,d 作检验，每种情况下得到的解的个数都与上述完全一致。

常见错误

- 在 (ii) 中遗漏边界情况 $c = a$ 及 $c = b$；此时 V 形刚好碰到正方形的一个顶点。
- 在 (iii) 中假设 h 是单调（monotonic）的。其实不然：当小浴缸偏离中央地位于大浴缸内时，h 在 (d, b) 上递减。令解的个数不受影响的是，h 在该处已经是正数。
- 在 (iii) 中遗漏中点重合时的无限多解情况。

STEP 之外

函数 $|x - a| + |x - b|$ 是 x 到两个点的距离总和。把这类距离之和最小化，正是统计学中中位数（median）以及 ℓ^1（“计程车”）范数（norm）背后的概念。像 f 这样的函数是凸（convex）的，而这里关于斜率逐段递增的论证，正是凸分析（convex analysis）的起点；凸分析是线性规划（linear programming）和最优化（optimisation）的基础。Bartle 与 Sherbert 所著的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）把这里用到的连续性和单调性论证严格化。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。