详细解答

STEP II 2014，第 6 题

纯数学 · 三角级数

STEP II 2014，第 6 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q6

关键思路

把每个 $\cos rx$ 乘以 $2\sin\frac{1}{2}x$，就会变成两个正弦之差，于是整个和式可以伸缩相消（telescopes）。这个和式正正就是 $S_n'(x)$，这也是题目给出这个恒等式的原因：它告诉我们 S_n 在哪里有驻点（stationary point）。在这样的点上，新加的项 $\frac{1}{n}\sin nx$ 原来是非负的，所以加上它不会制造出负的极小值；再从 $S_1 = \sin x$ 开始用归纳法（induction），就可以完成证明。

解答

余弦之和

利用和差化积公式（factor formula）$\sin A - \sin B = 2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}$，取 $A = (r+\frac{1}{2})x$、$B = (r-\frac{1}{2})x$，得

$$\sin(r+\tfrac{1}{2})x - \sin(r-\tfrac{1}{2})x = 2\cos rx\,\sin\tfrac{1}{2}x.$$

由 $r = 1$ 加到 n，右边加起来是 $2\sin\frac{1}{2}x\,(\cos x + \cdots + \cos nx)$，而左边除了首项和末项之外全部互相抵消：

$$2\sin\tfrac{1}{2}x\sum_{r=1}^{n}\cos rx = \sin(n+\tfrac{1}{2})x - \sin\tfrac{1}{2}x.$$

两边除以 $2\sin\frac{1}{2}x \neq 0$，即得所求结果。留意逐项微分（differentiating term by term）可得

$$S_n'(x) = \sum_{r=1}^{n}\cos rx,$$

所以这个恒等式就是 S_n' 的闭形式（closed form）。

第 (i) 部分

这里 $S_2(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$，所以

$$S_2'(x) = \cos x + \cos 2x = 2\cos^2 x + \cos x - 1 = (2\cos x - 1)(\cos x + 1).$$

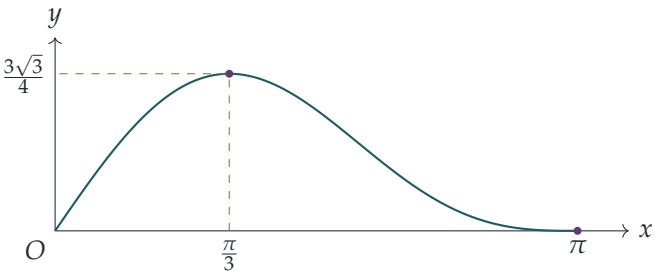
在 $[0, \pi]$ 上，当 $\cos x = \frac{1}{2}$，即 $x = \frac{\pi}{3}$，以及当 $\cos x = -1$，即 $x = \pi$ 时，它等于零。对应的值为

$$S_2(\tfrac{\pi}{3}) = \tfrac{\sqrt{3}}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{\sqrt{3}}{2} = \tfrac{3\sqrt{3}}{4}, \qquad S_2(\pi) = 0.$$

由于 $\cos x + 1 \geq 0$，S_2' 的正负号与 $2\cos x - 1$ 相同：在 $[0, \frac{\pi}{3})$ 上为正，在 $(\frac{\pi}{3}, \pi)$ 上为负。所以 $x = \frac{\pi}{3}$ 是极大值（maximum），而 S_2 由此递减至 $x = \pi$ 时的 0，到达时斜率为零。在 π 附近，设 $x = \pi - t$,

$$S_2 = \sin t - \tfrac{1}{2}\sin 2t \approx \left(t - \tfrac{t^3}{6}\right) - \left(t - \tfrac{4t^3}{6}\right) = \tfrac{1}{2}t^3,$$

所以曲线到达横轴时会像三次曲线般变得平坦。此外 $S_2(0) = 0$，且 $S_2'(0) = 2$。



第 (ii) 部分

假设 $S_n'(x_0) = 0$, 其中 $0 < x_0 < \pi$。那么 $\sin\frac{1}{2}x_0 \neq 0$, 所以恒等式适用, 得 $\sin(n+\frac{1}{2})x_0 = \sin\frac{1}{2}x_0$。展开左边,

$$\sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 + \cos nx_0\sin\tfrac{1}{2}x_0 = \sin\tfrac{1}{2}x_0 \iff \sin nx_0\cos\tfrac{1}{2}x_0 = (1-\cos nx_0)\sin\tfrac{1}{2}x_0.$$

由于 $0 < \frac{1}{2}x_0 < \frac{\pi}{2}$，有 $\cos\frac{1}{2}x_0 > 0$，两边除以它得

$$\sin nx_0 = (1-\cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0,$$

此即所求。因此，对于 $n \geq 2$,

$$S_n(x_0) - S_{n-1}(x_0) = \frac{1}{n}\sin nx_0 = \frac{1}{n}(1-\cos nx_0)\tan\tfrac{1}{2}x_0 \geq 0,$$

因为 $1 - \cos nx_0 \geq 0$ 且 $\tan\frac{1}{2}x_0 > 0$。所以 $S_n(x_0) \geq S_{n-1}(x_0)$。

现在假设对所有 $x \in (0, \pi)$ 都有 $S_{n-1}(x) > 0$，并用反证法（proof by contradiction），假设存在某个 $c \in (0, \pi)$ 使得 $S_n(c) \leq 0$。

想一想 我们怎样知道有驻点可用?

S_n 在闭区间（closed interval）$[0,\pi]$ 上连续（continuous），所以它在那里取得最小值 m，而且 $m \le S_n(c) \le 0$。若 $m < 0$，由于 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$，最小值不在端点；若 $m = 0$，则 c 本身就是取得最小值的内点。无论哪种情况，都存在 $x_0 \in (0,\pi)$ 使得 $S_n(x_0) = m \le 0$；又由于 S_n 可微（differentiable），内部的最小值必定是驻点：$S_n'(x_0) = 0$。于是前面的结果给出

$$0 \ge S_n(x_0) \ge S_{n-1}(x_0) > 0,$$

矛盾。所以对所有 $x \in (0,\pi)$ 都有 $S_n(x) > 0$。

第 (iii) 部分

我们用归纳法证明当 $0 < x < \pi$ 时 $S_n(x) > 0$。当 $n = 1$ 时，在 $(0,\pi)$ 上 $S_1(x) = \sin x > 0$。若结论对 S_{n-1} 成立，则第 (ii) 部分说明它对 S_n 亦成立。所以结论对每个 $n \ge 1$ 都成立。在端点处，每一项 $\frac{1}{r}\sin rx$ 都是零，所以 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$。因此对所有 $n \ge 1$ 及 $0 \le x \le \pi$，都有 $S_n(x) \ge 0$。

验算

- 在余弦之和中代入 $n = 1$：$\dfrac{\sin\frac{3}{2}x - \sin\frac{1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ 应该等于 $\cos x$，而由和差化积公式，它确实如此。
- 第 (i) 部分与恒等式吻合：$S_2' = 0$ 即 $\sin\frac{5}{2}x = \sin\frac{1}{2}x$，它在 $(0,\pi]$ 内的解是 $x = \frac{\pi}{3}$ 和 $x = \pi$。
- 极大值 $\frac{3\sqrt{3}}{4} \approx 1.299$ 与在细密网格上直接计算 S_2 的结果相符。电脑验算找出了 $2 \le n \le 40$ 时 S_n 在 $(0,\pi)$ 内的每一个驻点，并在每一点确认了第 (ii) 部分的恒等式及 $S_n(x_0) \ge S_{n-1}(x_0)$；亦确认了对于 $n \le 60$，在区间内部 $S_n > 0$。

常见错误

- 论证“处处 $S_n \ge S_{n-1}$”。这是错的（例如在 $(\frac{\pi}{2},\pi)$ 上 $\sin 2x < 0$）；这个不等式只在 S_n 的驻点成立，所以才需要用最小值的论证。
- 找最小值时忘记端点：必须利用 $S_n(0) = S_n(\pi) = 0$，才能把非正的最小值定位在区间内部。
- 除以 $\cos\frac{1}{2}x_0$ 时没有说明它为何是正数。

STEP 之外

第 (iii) 部分的结果就是 Fejér–Jackson–Gronwall 不等式。当 $n \to \infty$ 时，$S_n(x)$ 在 $(0, \pi]$ 上收敛（converges）至 $\frac{1}{2}(\pi - x)$：$\sum \frac{1}{r} \sin rx$ 是锯齿波（sawtooth wave）的傅里叶级数（Fourier series），而在 $x = 0$ 附近，部分和会出现过冲（吉布斯现象，Gibbs phenomenon）。傅里叶级数，以及它们何时收敛这个微妙的问题，是大学第一门分析或数学方法课程的核心课题。T. W. Körner 的 *Fourier Analysis*（《傅里叶分析》）是一部精彩而涵盖广泛的著作。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。