详细解答

STEP II 2014，第 5 题

纯数学 · 齐次微分方程

STEP II 2014，第 5 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q5

关键思路

两条方程的右方都是两个线性式之比。在 (i) 中，每一项都是一次项，因此斜率（gradient）只取决于 y/x，代入 $y = xu$ 便可把方程化为可分离变量（separable）的方程。在 (ii) 中，常数项破坏了这个性质，但只要把原点移到分子和分母所代表的两条直线的交点，便可消去常数项；之后就跟 (i) 完全一样。

解答

若 $y = xu$，由乘积法则（product rule）得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}.$$

第 (i) 部分

把右方的分子和分母同除以 x，方程变为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1}{u-2}, \qquad \text{所以} \qquad x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2u+1-u(u-2)}{u-2} = \frac{1+4u-u^2}{u-2}.$$

分离变量，得

$$\int \frac{u-2}{1+4u-u^2}\,\mathrm{d}u = \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$$

? **想一想** 不用部分分式（partial fractions），怎样积分左方？

把分母求导：$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}(1+4u-u^2) = 4-2u = -2(u-2)$。因此分子是分母导数的 $-\frac{1}{2}$ 倍，于

是

$$-\tfrac{1}{2}\ln\left|1+4u-u^2\right| = \ln|x| + C.$$

两边乘以 -2 再取指数，得 $x^2\,|1+4u-u^2| = A$，其中 A 为正常数；即对某常数 K 有 $x^2(1+4u-u^2) = K$（沿着曲线，符号保持不变）。现代入 $u = y/x$，使得 $x^2(1+4y/x - y^2/x^2) = x^2+4xy-y^2$：

$$x^2 + 4xy - y^2 = K.$$

在 $(1,1)$ 处得 $K = 1+4-1 = 4$，所以解曲线为

$$\boxed{x^2 + 4xy - y^2 = 4}$$

（在 $(1,1)$ 处 $u = 1$，此时 $1+4u-u^2 = 4 \neq 0$ 且 $u \neq 2$，所以我们除过的式子在起点处都不为零。）

第 (ii) 部分

直线 $x - 2y - 4 = 0$ 与 $2x + y - 3 = 0$ 相交于 $y = 3-2x$ 且 $x - 2(3-2x) - 4 = 0$ 之处，即 $(2,-1)$。因此取 $a = 2$、$b = -1$：$x = X+2$，$y = Y-1$。于是 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = \mathrm{d}Y/\mathrm{d}X$，而且

$$x - 2y - 4 = (X+2) - 2(Y-1) - 4 = X - 2Y,$$
$$2x + y - 3 = 2(X+2) + (Y-1) - 3 = 2X + Y,$$

所以常数项消失了：

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}X} = \frac{X-2Y}{2X+Y}.$$

这与 (i) 的形式相同，所以代入 $Y = XV$：

$$V + X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V}{2+V} \quad\Longrightarrow\quad X\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}X} = \frac{1-2V-V(2+V)}{2+V} = \frac{1-4V-V^2}{2+V}.$$

由于 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}V}(1-4V-V^2) = -2(2+V)$，分子同样是分母导数的倍数。因此

$$\int \frac{2+V}{1-4V-V^2}\,\mathrm{d}V = \int \frac{1}{X}\,\mathrm{d}X \quad\Longrightarrow\quad -\tfrac{1}{2}\ln\left|1-4V-V^2\right| = \ln|X| + C,$$

与之前一样得 $X^2(1-4V-V^2) = K$，即

$$X^2 - 4XY - Y^2 = K.$$

点 $(1,1)$ 对应 $X = -1$、$Y = 2$，得 $K = 1 - 4(-1)(2) - 4 = 5$。换回 x 和 y，

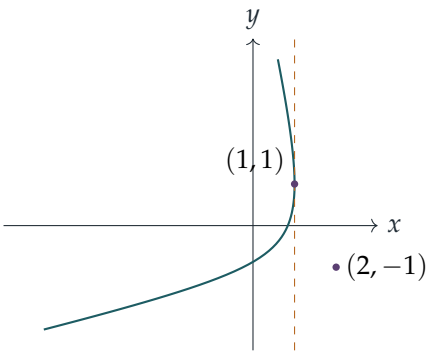
$$(x-2)^2 - 4(x-2)(y+1) - (y+1)^2 = 5,$$

展开得

$$(x^2 - 4x + 4) - 4(xy + x - 2y - 2) - (y^2 + 2y + 1) = 5$$
$$\Longleftrightarrow\quad \boxed{x^2 - 4xy - y^2 - 8x + 6y + 6 = 0}$$

想一想 在 $(1,1)$ 处，分母 $2x+y-3$ 等于零。这个解还有意义吗?

有：该处的斜率为无穷大，所以曲线在 $(1,1)$ 处有一条铅垂切线（vertical tangent）。隐方程（implicit equation）完全可以描述这条曲线，只是它在该点附近并非某个函数 $y(x)$ 的图像而已。换句话说，x 是 y 的光滑函数。把二次方程对 x 求解，在经过 $(1,1)$ 的分支上得 $x=2y+4-\sqrt{5y^2+10y+10}$；由于 $5y^2+10y+10=5(y+1)^2+5>0$，它对所有 y 都有定义，并在 $y=1$ 时取得最大值 $x=1$。



图中显示经过 $(1,1)$ 的分支（蓝绿色），它在该点与铅垂线 $x=1$（虚线）相切；$(2,-1)$ 是双曲线（hyperbola）的中心。

验算

- 对答案进行隐函数求导(implicit differentiation)。在 (i) 中，由 $2x+4y+(4x-2y)y'=0$ 得 $y'=\dfrac{x+2y}{y-2x}$，符合要求。在 (ii) 中，由 $2x-4y-8+(6-4x-2y)y'=0$ 得 $y'=\dfrac{x-2y-4}{2x+y-3}$。
- 两条曲线都经过 $(1,1)$：$1+4-1=4$ 及 $1-4-1-8+6+6=0$。
- 用电脑从 $(1,1)$ 出发，以数值方法逐步求解每条微分方程（differential equation），方框内方程的左方一直保持等于 4 和 0，误差约为 10^{-13}。在 (i) 中，$(1,1)$ 处的斜率为 -3。

常见错误

- 在 $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x=u+x\,\mathrm{d}u/\mathrm{d}x$ 中漏掉 u，结果得到错误的可分离方程。
- 在 (ii) 中用错坐标代入条件：点 $(1,1)$ 会变成 $(X,Y)=(-1,2)$，而不是 $(1,1)$。

- 对 u 贸然使用部分分式：$1+4u-u^2$ 的根是 $2\pm\sqrt{5}$，计算繁复，而被积函数其实已经是 f'/f 的形式。

STEP 之外

右方只取决于 y/x 的方程称为齐次方程（homogeneous equation），而 (ii) 中平移原点的做法，是处理线性函数之比的标准技巧。这里的两条方程同时也是恰当方程（exact equation）：把 (i) 写成 $(2y+x)\,\mathrm{d}x-(y-2x)\,\mathrm{d}y=0$，两个系数满足交叉偏导数检验，守恒量 $x^2+4xy-y^2$ 可以直接读出。恰当方程、积分因子（integrating factor）以及线性系统的相图（phase portrait）（这些双曲线的真正身份正是如此），可参阅 Boyce 和 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。