详细解答

STEP II 2014，第 4 题

纯数学 · 代换积分法

STEP II 2014，第 4 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q4

关键思路

代换（substitution）$u = 1/x$ 会把区间 $[1/b, b]$ 的两个端点互换，因此它把积分 I 变回同一范围上的积分。若新的被积函数（integrand）只是原来的被积函数变了号，便得到 $I = -I$。若新的被积函数与原来的密切相关，把 I 的两种形式相加，可能得到一个容易积分得多的被积函数。在最后一部分，同样的技巧（取 $u = a^2/x$，使 $[0, \infty)$ 映射到自身）会给出一条方程，从中可解出所求的积分。

解答

第 (i) 部分

记该积分为 I。令 $x = 1/u$，则 $\mathrm{d}x = -\frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u$ 及 $\ln x = -\ln u$。当 $x = 1/b$ 时 $u = b$；当 $x = b$ 时 $u = 1/b$。此外

$$(a^2 + x^2)(a^2x^2 + 1) = \left(a^2 + \frac{1}{u^2}\right)\left(\frac{a^2}{u^2} + 1\right) = \frac{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)}{u^4}.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \int_b^{1/b} \frac{\frac{1}{u}(-\ln u)}{(a^2u^2 + 1)(a^2 + u^2)/u^4}\left(-\frac{1}{u^2}\right)\mathrm{d}u \\ &= \int_b^{1/b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u = -\int_{1/b}^{b} \frac{u \ln u}{(a^2 + u^2)(a^2u^2 + 1)}\,\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

最后这个积分其实就是 I，只是把哑变量（dummy variable）改了名。因此 $I = -I$，得 $I = 0$，即所求。（由于 $b > 0$，被积函数在 $[1/b, b]$ 上连续，所以 I 是一个有限的数，这一步是成立的。）

第 (ii) 部分

记这个积分为 I。同样的代换给出 $\frac{\mathrm{d}x}{x} = u \cdot (-\frac{1}{u^2})\mathrm{d}u = -\frac{\mathrm{d}u}{u}$，而积分上下限也像之前一样互换：

$$I = \int_b^{1/b} \arctan\Big(\frac{1}{u}\Big)\Big(-\frac{1}{u}\Big)\mathrm{d}u = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

这一次并非单纯变号，所以我们把这个形式与原来的形式相加：

$$2I = \int_{1/b}^{b} \frac{\arctan u + \arctan(1/u)}{u}\,\mathrm{d}u.$$

想一想 当 $u > 0$ 时，$\arctan u + \arctan(1/u)$ 等于多少?

设 $\theta = \arctan u$，其中 $u > 0$，则 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$，且 $\tan(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cot\theta = 1/u$。由于 $\frac{\pi}{2} - \theta$ 亦位于 $(0, \frac{\pi}{2})$ 内，它就是 $\arctan(1/u)$。所以对所有 $u > 0$，$\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$。（当 $u < 0$ 时，两者之和为 $-\frac{\pi}{2}$，但 $[1/b, b]$ 内每个 u 都是正数。）因此

$$2I = \frac{\pi}{2}\int_{1/b}^{b} \frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{\pi}{2}(\ln b - \ln(1/b)) = \pi \ln b,$$

所以 $I = \dfrac{\pi \ln b}{2}$，即所求。无论 $b > 1$ 还是 $0 < b < 1$，此结果均成立。

第 (iii) 部分

设 $J = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a^2 + x^2)^2}$。这个积分收敛（converge），因为被积函数连续，而且当 x 很大时不超过 $1/x^4$。我们想要一个代换，把 $(0, \infty)$ 映射到自身，并把 $a^2 + x^2$ 变成 $a^2 + u^2$ 的某个倍数，所以取 $u = a^2/x$，即 $k = a^2$。于是 $x = a^2/u$，$\mathrm{d}x = -\frac{a^2}{u^2}\,\mathrm{d}u$，$x \to 0^+$ 对应 $u \to \infty$，而且

$$a^2 + x^2 = a^2 + \frac{a^4}{u^2} = \frac{a^2(u^2 + a^2)}{u^2}.$$

因此

$$J = \int_{\infty}^{0} \frac{u^4}{a^4(a^2 + u^2)^2}\Big(-\frac{a^2}{u^2}\Big)\mathrm{d}u = \frac{1}{a^2}\int_0^{\infty} \frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2}\,\mathrm{d}u.$$

现在把分子写成 $u^2 = (a^2 + u^2) - a^2$：

$$\frac{u^2}{(a^2 + u^2)^2} = \frac{1}{a^2 + u^2} - \frac{a^2}{(a^2 + u^2)^2}.$$

两部分在 $(0, \infty)$ 上的积分都收敛，所以可以把积分拆开。利用题目给出的结果，

$$J = \frac{1}{a^2}\Big(\frac{\pi}{2a} - a^2 J\Big) = \frac{\pi}{2a^3} - J.$$

因此 $2J = \dfrac{\pi}{2a^3}$，所以

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}x}{(a^2+x^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3},$$

即所求。

验算

- 在 (ii) 中，$b = 1$ 给出长度为零的区间，而 $\frac{\pi}{2}\ln 1 = 0$ 确实成立。把 b 换成 $1/b$ 会使上下限互换，所以积分应该变号，而 $\ln(1/b) = -\ln b$ 与此吻合。
- 在 (iii) 中，答案应有正确的标度关系：令 $x = at$ 得 $J = a^{-3}\int_0^\infty (1+t^2)^{-2}\,\mathrm{d}t$，所以 J 必定是某常数乘以 a^{-3}。取 $a = 1$，代换 $x = \tan\theta$ 给出 $\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{4}$，与结果相符。
- 以数值计算，(ii) 中的积分在 $b = 2$ 时为 $1.08879\ldots = \frac{\pi}{2}\ln 2$。对于若干随机选取的 a 和 b，(i) 中的积分计算结果都是 0（准确至多个小数位）。

常见错误

- 忘记 $u = 1/x$ 同时会使上下限倒转。$\mathrm{d}x = -\mathrm{d}u/u^2$ 带来的负号和上下限的互换，两者都必须留意。
- 使用 $\arctan u + \arctan(1/u) = \frac{\pi}{2}$ 时没有说明它需要 $u > 0$。
- 在 (iii) 中，得到 $\frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{u^2}{(a^2+u^2)^2}\,\mathrm{d}u$ 后就停下来，没有发现它可以改写成以 J 和题目给出的积分表示。

STEP 之外

利用定义域的对称性把一个积分与其自身联系起来，是一个常见技巧。它会在围道积分（contour integration）以及诸如 $\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 的积分中再次出现。(iii) 中的积分亦来自一个一般的积分族：把 $\int_0^\infty (\lambda+x^2)^{-1}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\lambda^{-1/2}$ 对 λ 求导，即可立刻得到同样的答案（“积分号下求导”（differentiation under the integral sign））。实分析（real analysis）课程会解释这类步骤，以及反常积分（improper integral）的处理，在甚么情况下是容许的。参见 Bartle 与 Sherbert 的 *Introduction to Real Analysis*（《实分析导论》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。