详细解答

STEP II 2014，第 3 题

纯数学 · 切线与包络线

STEP II 2014，第 3 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q3

关键思路

在 P 点的切线（tangent）其实只是一条直线，斜率（gradient）为 y'，y 截距（y-intercept）为 $y - xy'$，因此第 (i) 部分把“距离恒定”这个性质化为一条微分方程（differential equation）。把这条方程微分后会出现因子 y''，而令乘积为零的两种方式，正好给出两族曲线：直线（$y'' = 0$）和一个圆。第 (iii) 部分则要求我们把这些曲线的片段平滑地拼接起来。

解答

第 (i) 部分

若 $m = 0$，直线为 $y = c$，距离显然是 c，所以设 $m \neq 0$。直线与 y 轴交于 $A = (0, c)$，并与 x 轴成锐角（acute angle）θ，其中 $\tan\theta = |m|$。设 N 为由 O 到该直线的垂足（foot of the perpendicular）。在直角三角形 ONA 中，直线与 y 轴在 A 点所成的角为 $\frac{\pi}{2} - \theta$，所以角 AON 为 θ，于是

$$ON = OA\cos\theta = \frac{c}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{c}{\sqrt{1+m^2}} = c(m^2+1)^{-\frac{1}{2}}.$$

（求 $x^2 + (mx + c)^2$ 的最小值也会得到同一结果：这是 x 的二次式（quadratic），在 $x = -\frac{mc}{1+m^2}$ 时取最小值 $\frac{c^2}{1+m^2}$。）

若 $c < 0$，以原点作反射（reflection），直线会变成 $y = mx + |c|$，而与 O 的距离不变，所以一般而言距离为 $|c|(1+m^2)^{-\frac{1}{2}}$。

第 (ii) 部分

在 $P=(x,y)$ 点，切线的斜率为 y' 并经过 P，所以以坐标 (X,Y) 表示，其方程为

$$Y = y'X + (y - xy').$$

这是第 (i) 部分那种形式的直线，其中 $m=y'$、$c=y-xy'$（按假设它不是铅垂线）。因此它与 O 的距离为

$$a = \frac{|y-xy'|}{\sqrt{1+(y')^2}},$$

两边平方得

$$(y-xy')^2 = a^2(1+(y')^2). \qquad (*)$$

微分。这里 a 是常数，而 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y-xy') = y'-y'-xy'' = -xy''$。所以把 $(*)$ 微分得

$$2(y-xy')(-xy'') = 2a^2y'y'', \qquad \text{即} \qquad y''[\,x(y-xy')+a^2y'\,] = 0.$$

> **想一想** 乘积为零，怎样变成曲线的两种不同情况?

在每一点，要么 $y''=0$，要么方括号内的式子为零。在曲线上 $y''=0$ 的一段，曲线是直的；在 $y''\neq 0$ 的一段，方括号必须为零。我们逐一处理这两种情况。（我们假设 $a>0$；若 $a=0$，每条切线都经过 O，C 就只是一条经过原点的直线。）

情况一：$y''=0$。此时 $y'=m$ 为常数，而 $y=mx+k$，其中 m、k 为常数。代入 $(*)$（此时 $y-xy'=k$），得 $k^2=a^2(1+m^2)$，所以

$$y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}.$$

情况二：*方括号为零*。此时 $xy-x^2y'+a^2y'=0$，所以

$$(x^2-a^2)\,y' = xy.$$

首先，$x^2\neq a^2$：若 $x=\pm a$，则 $xy=0$ 迫使 $y=0$，而 $(*)$ 变成 $a^2(y')^2=a^2(1+(y')^2)$，这是不可能的。所以我们可以相除：

$$y' = \frac{xy}{x^2-a^2}, \qquad y-xy' = \frac{y(x^2-a^2)-x^2y}{x^2-a^2} = \frac{-a^2y}{x^2-a^2}.$$

把两者代入 $(*)$，再全式乘以 $(x^2-a^2)^2/a^2$：

$$\begin{aligned} & a^2y^2 = (x^2-a^2)^2 + x^2y^2 \\ \iff \quad & y^2(a^2-x^2) = (a^2-x^2)^2 \\ \iff \quad & (a^2-x^2)\,(x^2+y^2-a^2) = 0. \end{aligned}$$

由于 $a^2 - x^2 \neq 0$，我们得出 $x^2 + y^2 = a^2$。

所以，要么对某个 m 有 $y = mx \pm a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$，要么 $x^2 + y^2 = a^2$，正如所求。两者确实都具有该性质：由第 (i) 部分，这些直线与 O 的距离为 a；而以 O 为圆心、半径为 a 的圆，其每条切线与 O 的距离都是 a。

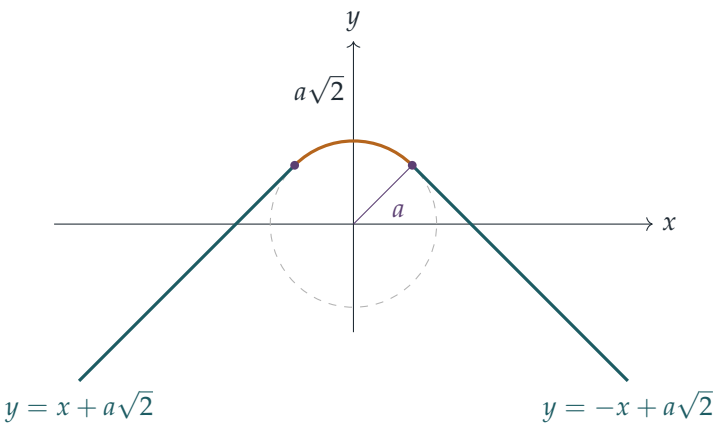
第 (iii) 部分

在直线段与圆弧相接之处，C 必须有切线，所以直线在该点的斜率必须与圆弧相同：每条直线都是圆在圆弧端点处的切线。此外，每条切线都必须不是铅垂线，所以圆弧不能到达 $(\pm a, 0)$ 两点；又因为 C 是 x 的函数（function）的图像，它只能用圆的上半部或只用下半部。

一个例子：取 $x^2 + y^2 = a^2$ 上由 $\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 经顶部到 $\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ 的圆弧，两端再以该处的切线延伸：

$$y = \begin{cases} x + a\sqrt{2}, & x \leq -\frac{a}{\sqrt{2}}, \\ \sqrt{a^2 - x^2}, & |x| \leq \frac{a}{\sqrt{2}}, \\ -x + a\sqrt{2}, & x \geq \frac{a}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

这两条直线的 $m = \pm 1$，截距为 $a\sqrt{2} = a(1+m^2)^{\frac{1}{2}}$，符合情况一的要求。在 $x = \pm\frac{a}{\sqrt{2}}$ 处，圆弧的斜率为 $-\frac{x}{y} = \mp 1$，与直线吻合，所以斜率处处连续（continuous）且有限。



上半圆（或下半圆）上任何不包含 $(\pm a, 0)$ 的圆弧，两端以其切线延伸，都同样可行。

验算

- 在第 (i) 部分，$m = 0$ 给出距离 c；当 $|m| \to \infty$，直线变得陡峭，距离趋于 0，这对经过 $(0, c)$ 的直线来说理应如此。

- 在圆上，$y' = -x/y$ 给出 $y - xy' = a^2/y$，而 $(*)$ 两边都等于 a^4/y^2。
- 对于 $a = 1$ 的例子，我们用电脑在 $x = -5$ 至 $x = 5$ 之间的 1001 个点检查了 O 到切线的距离，每次都是 1；例如在 $x = 2$，切线为 $y = -x + \sqrt{2}$，距离为 $\sqrt{2}/\sqrt{2} = 1$。

常见错误

- 把微分后的方程除以 y''，因而遗漏了直线解。
- 忘记 a 是常数，或把 xy' 微分成 y'，而不是 $y' + xy''$。
- 在第 (iii) 部分，直线与圆弧在接驳处形成尖角，或用了整个半圆，而半圆两端的切线是铅垂的。

STEP 之外

这里的圆是直线族 $y = mx \pm a\sqrt{1 + m^2}$ 的*包络线*（envelope），而 $(*)$ 是一条克莱罗方程（Clairaut equation）$y = xy' + f(y')$：它的通解（general solution）是一族直线，而它的*奇解*（singular solution）就是这族直线的包络线。把 $(*)$ 视为 y' 的二次方程，其判别式（discriminant）为 $4a^2(x^2 + y^2 - a^2)$，所以两个斜率选择恰好在圆上重合；这就是为甚么解可以像第 (iii) 部分那样在圆上拼接，也是为甚么解的唯一性（uniqueness）不成立。Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）讨论了一阶方程解的存在性（existence）与唯一性。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。