详细解答

STEP II 2014，第 2 题

纯数学 · 积分不等式

> **STEP II 2014，第 2 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q2

本题在 *Beyond STEP* 第 3.7 节 $\pi^2 \le 10$ 中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch03/wirtinger.html

关键思路

$(*)$ 两边都是积分，对任何明确给出的 f 都可以精确计算，所以每一个在两端都等于零的函数，都会把 $(*)$ 变成一条涉及 π 的数值不等式。真正需要选择的，只是怎样取自由常数，使 $f(0) = f(\pi) = 0$。若函数在某一端不等于零，它可以数值很大而变化很慢，这正是端点条件（end conditions）重要的原因。

解答

第 (i) 部分

取 $f(x) = \sin nx$，则 $f'(x) = n\cos nx$。利用 $\sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$ 及 $\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\theta)$，

$$\int_0^{\pi} \sin^2 nx \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\Big[x - \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\Big]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2},$$
$$\int_0^{\pi} n^2\cos^2 nx \,\mathrm{d}x = \tfrac{n^2}{2}\Big[x + \tfrac{1}{2n}\sin 2nx\Big]_0^{\pi} = \frac{n^2\pi}{2},$$

这是因为对整数 n 有 $\sin 2n\pi = 0$。由于 $n \ge 1$，故 $n^2 \ge 1$，于是 $\frac{\pi}{2} \le \frac{n^2\pi}{2}$，$(*)$ 成立（当且仅当 $n = 1$ 时取等号）。

反例（counterexamples）。取 $f(x) = \pi - x$，它满足 $f(\pi) = 0$，但 $f(0) = \pi \ne 0$。于是

$f'(x) = -1$，而

$$\int_0^\pi (\pi - x)^2 \,\mathrm{d}x = \left[-\tfrac{1}{3}(\pi - x)^3\right]_0^\pi = \frac{\pi^3}{3}, \qquad \int_0^\pi 1 \,\mathrm{d}x = \pi.$$

由于 $\pi^2 > 3$，得 $\frac{\pi^3}{3} > \pi$，所以 $(*)$ 不成立。同理，$f(x) = x$ 满足 $f(0) = 0$，但 $f(\pi) = \pi \neq 0$，它给出相同的两个积分，$\frac{\pi^3}{3} > \pi$，所以 $(*)$ 再次不成立。因此，即使另一个端点条件成立，两个端点条件都不能省去。

第 (ii) 部分

二次函数（quadratic）。我们需要 $f(0) = c = 0$ 及 $f(\pi) = a\pi^2 + b\pi = 0$，所以 $b = -a\pi$，且 $f(x) = ax(x - \pi)$。若取 $a = 0$，则 $f \equiv 0$，只得到毫无用处的不等式 $0 \leq 0$，所以取 $a \neq 0$。当 f 乘以 a 时，$(*)$ 两边都乘以 a^2，所以不妨取 $a = -1$：

$$f(x) = x(\pi - x), \qquad f'(x) = \pi - 2x.$$

代入 $x = \frac{\pi}{2} + u$，可使两个积分都变得对称：$f = \frac{\pi^2}{4} - u^2$，$f' = -2u$，而 u 的范围是 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$。记 $h = \frac{\pi}{2}$，

$$\int_0^\pi f^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} \left(h^2 - u^2\right)^2 \mathrm{d}u = 2\left(h^5 - \tfrac{2}{3}h^5 + \tfrac{1}{5}h^5\right) = \frac{16h^5}{15} = \frac{\pi^5}{30},$$
$$\int_0^\pi f'^2 \,\mathrm{d}x = \int_{-h}^{h} 4u^2 \,\mathrm{d}u = \frac{8h^3}{3} = \frac{\pi^3}{3}.$$

所以 $(*)$ 给出 $\dfrac{\pi^5}{30} \leq \dfrac{\pi^3}{3}$，两边除以正数 $\frac{\pi^3}{30}$，得

$$\pi^2 \leq 10,$$

即为所求。

三角函数（trigonometric function）。现在 $f(0) = q + r$，而 $f(\pi) = p \sin\frac{\pi}{2} + q\cos\frac{\pi}{2} + r = p + r$。两者同时为零，当且仅当 $p = q = -r$。同样地，$r = 0$ 会给出 $f \equiv 0$，而缩放并无影响，所以取 $r = -1$：

$$f(x) = \sin\tfrac{1}{2}x + \cos\tfrac{1}{2}x - 1, \qquad f'(x) = \tfrac{1}{2}\left(\cos\tfrac{1}{2}x - \sin\tfrac{1}{2}x\right).$$

> ? **想一想** 怎样把 f 平方，而不弄出一大堆交叉项（cross terms）？

把它组合成 $(s + c) - 1$，其中 $s = \sin\frac{1}{2}x$，$c = \cos\frac{1}{2}x$。于是 $(s + c)^2 = 1 + 2sc = 1 + \sin x$，所以

$$f^2 = (s + c)^2 - 2(s + c) + 1 = 2 + \sin x - 2\sin\tfrac{1}{2}x - 2\cos\tfrac{1}{2}x.$$

利用 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$、$\int_0^\pi \sin\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[-2\cos\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$ 及 $\int_0^\pi \cos\frac{1}{2}x\,\mathrm{d}x = \left[2\sin\frac{1}{2}x\right]_0^\pi = 2$,

$$\int_0^\pi f^2\,\mathrm{d}x = 2\pi + 2 - 4 - 4 = 2\pi - 6.$$

同样地，$(c-s)^2 = 1 - \sin x$，所以

$$\int_0^\pi f'^2\,\mathrm{d}x = \frac{1}{4}\int_0^\pi (1-\sin x)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi-2}{4}.$$

于是 $(*)$ 表示 $2\pi - 6 \le \frac{1}{4}(\pi-2)$，即 $8\pi - 24 \le \pi - 2$，所以

$$7\pi \le 22, \qquad \text{即} \qquad \pi \le \frac{22}{7}.$$

比较。把第二条不等式平方（两边皆为正数），得

$$\pi^2 \le \frac{484}{49} < \frac{490}{49} = 10.$$

所以三角函数的选择给出较小的上界（upper bound）$\pi^2 \le \frac{484}{49} \approx 9.878$，因此是较好的估计。两者都是上界，所以较小的一个更接近真实值。

验算

- 真实值为 $\pi^2 \approx 9.8696$，低于 10 及 $\frac{484}{49} \approx 9.8776$，这是必然的。
- 以数值计算，对于三角函数 f，$(*)$ 两边分别为 $2\pi - 6 \approx 0.2832$ 及 $\frac{1}{4}(\pi-2) \approx 0.2854$：两者非常接近，所以界 $\pi \le \frac{22}{7}$ 才会如此精确。对于二次函数，两边分别为 $\frac{\pi^5}{30} \approx 10.20$ 及 $\frac{\pi^3}{3} \approx 10.34$。
- 在第 (i) 部分中，$n = 1$ 时取等号，所以 $\sin x$ 是 $(*)$ 的极端情况。三角函数 f 的形状与 $\sin x$ 很接近，而 $x(\pi - x)$ 则稍逊一点，这解释了为何某个界较好。

常见错误

- 选取像 $f = 1$ 这样同时破坏两个端点条件的反例。这样做是正确的，但 $\pi - x$ 和 x 说明得更多：每个条件本身都是必需的。
- 在三角函数的情况下计算 f^2 的积分时，忘记 $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$（而不是 0）。
- 因为 10 是个“较整齐”的数，便说它是较好的估计。两者都是上界，所以较小的一个才较好。

STEP 之外

不等式 $(*)$ 就是 Wirtinger 不等式（Wirtinger's inequality），而最佳常数 1 来自 $\sin x$：它是在 $f(0) = f(\pi) = 0$ 条件下 $-f'' = \lambda f$ 的最小特征值（eigenvalue）。以选定的函数代入 $(*)$ 来测试，就是瑞利–里兹方法（Rayleigh–Ritz method），它总是给出该特征值的上界，也是工程师估算振动频率的基础。傅里叶级数（Fourier series）则能给出 $(*)$ 本身的一个简洁证明。有关背后的分析，可参阅 Abbott 的 *Understanding Analysis*（《理解分析》）；有关特征值方面，可参阅 Boyce 与 DiPrima 的 *Elementary Differential Equations*（《初等微分方程》）。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。