详细解答

STEP II 2014，第 11 题

力学 · 圆周运动

> **STEP II 2014，第 11 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s2-q11

关键思路

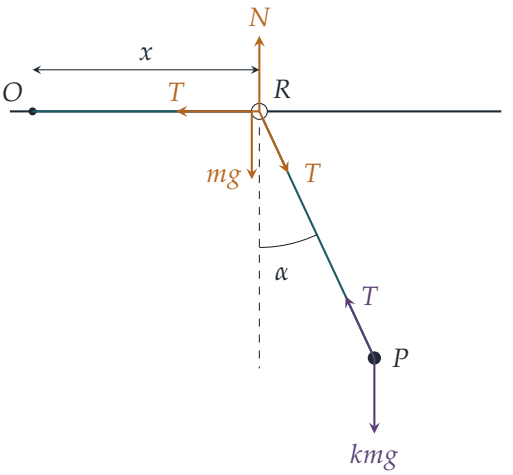
整个问题只由一个变量 x 主导。由于绳子不可伸长（inextensible），而 α 固定不变，P 的位置是 x 的一个简单函数（function），因此 P 的两个加速度分量都是 $\ddot{x}$ 的倍数。这样便得到三条运动方程（equations of motion）（两条关于 P，一条关于环的水平方向），但未知数只有两个：$\ddot{x}$ 和 T。超定方程组（overdetermined system）只有在某个特殊条件成立时才相容，而正是这个相容条件（consistency condition）把 α 和 k 联系起来。

解答

模型。环和 P 均视为质点（particle），绳子轻而不可伸长，环和轨道均光滑（smooth）。由于环是光滑的，绳子两段的张力（tension）T 相同。取 O 为原点，x 轴沿轨道、方向由 O 指向环，y 轴竖直向上。

P 的坐标。绳子由 O 到环的一段沿轨道，长度为 x，所以由环到 P 的一段长度为 $L-x$。这一段与向下的铅垂线成角 α，而 P 悬在环远离 O 的一侧（我们会在第 (i) 部分末尾说明为何如此选取）。因此

$$P = \left(x + (L-x)\sin\alpha,\ -(L-x)\cos\alpha\right).$$



第 (i) 部分

在 α 为常数的情况下，把 P 的坐标对时间微分两次，得

$$\ddot{x}_P = \ddot{x}\,(1-\sin\alpha), \qquad \ddot{y}_P = \ddot{x}\cos\alpha.$$

作用于 P 的力有向下的重量 kmg，以及沿绳子指向环的张力 T；张力的水平分量为 $-T\sin\alpha$，竖直分量为 $+T\cos\alpha$。

P，竖直方向： $km\,\ddot{y}_P = T\cos\alpha - kmg$，即

$$km\ddot{x}\cos\alpha = T\cos\alpha - kmg,$$

与所求相符。

P，水平方向：

$$km\ddot{x}\,(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha. \tag{1}$$

环，水平方向。环两边都受到绳子的作用：沿轨道的一段以力 T 把环拉向 O，而往下连到 P 的一段则以水平分量 $T\sin\alpha$ 把环拉离 O。环的重量和轨道的法向反作用力（normal reaction）都是竖直的（轨道光滑）。因此

$$m\ddot{x} = T\sin\alpha - T = -T(1-\sin\alpha). \tag{2}$$

想一想 为甚么 P 必须在环远离 O 的一侧?

假如 P 悬在靠近 O 的一侧，它的 x 坐标便是 $x-(L-x)\sin\alpha$，两条水平方程会变成 $km\ddot{x}(1+\sin\alpha) = T\sin\alpha$ 和 $m\ddot{x} = -T(1+\sin\alpha)$。第一条使 $\ddot{x}\geq 0$，第二条使 $\ddot{x}\leq 0$，于是 $\ddot{x}=0$ 且 $T=0$；但这样竖直方程便给出 $0=-kmg$，这是不可能的。所以那种位形不可能在 α 不变的情况下运动，上面的坐标才是正确的。

第 (ii) 部分

首先，$T \neq 0$：若 $T = 0$，则 (2) 给出 $\ddot{x} = 0$，而竖直方程给出 $0 = -kmg$，矛盾。

由 (2)，$m\ddot{x} = -T(1 - \sin\alpha)$。代入 (1)：

$$k(-T(1-\sin\alpha))(1-\sin\alpha) = -T\sin\alpha.$$

两边除以 $-T \neq 0$,

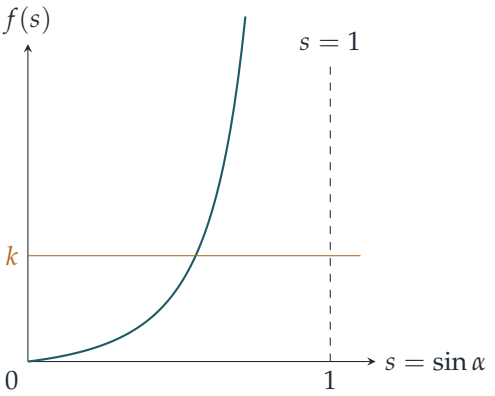
$$\frac{\sin\alpha}{(1-\sin\alpha)^2} = k,$$

与所求相符。（由于 α 是锐角（acute angle），$0 < \sin\alpha < 1$，所以除以 $(1-\sin\alpha)^2$ 是没有问题的。）

每一个 k 都可以出现。设 $s = \sin\alpha$，并在 $0 < s < 1$ 上定义 $f(s) = \dfrac{s}{(1-s)^2}$，这恰好涵盖所有 $\alpha \neq 0$ 的锐角 α。由商法则（quotient rule），

$$f'(s) = \frac{(1-s)^2 + 2s(1-s)}{(1-s)^4} = \frac{1+s}{(1-s)^3} > 0,$$

所以 f 严格递增（strictly increasing）。此外，当 $s \to 0^+$ 时 $f(s) \to 0$，当 $s \to 1^-$ 时 $f(s) \to \infty$，而且 f 连续（continuous）。因此 f 恰好取每个正值一次，即对每个 $k > 0$，恰有一个锐角 α 满足该条件。



无论水平线 $y = k$ 的高度是多少，它都恰好与曲线相交一次。

第 (iii) 部分

现在利用 (2) 和竖直方程消去 T。由 (2)，$T = -\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}$。代入竖直方程并除以 m：

$$k\ddot{x}\cos\alpha = -\frac{\ddot{x}\cos\alpha}{1-\sin\alpha} - kg \quad\Longrightarrow\quad \ddot{x}\cos\alpha\left(k + \frac{1}{1-\sin\alpha}\right) = -kg.$$

再利用第 (ii) 部分替换括号内的 k：

$$k+\frac{1}{1-\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha+(1-\sin\alpha)}{(1-\sin\alpha)^2}=\frac{1}{(1-\sin\alpha)^2}.$$

因此

$$\ddot{x}=-\frac{kg(1-\sin\alpha)^2}{\cos\alpha}=-\frac{g\sin\alpha}{\cos\alpha}=-g\tan\alpha,$$

这里再一次用了 $k(1-\sin\alpha)^2=\sin\alpha$。这就是所求的结果。

额外一提，$T=-\dfrac{m\ddot{x}}{1-\sin\alpha}=\dfrac{mg\tan\alpha}{1-\sin\alpha}>0$，所以绳子确实是拉紧的，符合模型的要求。

验算

- 取 $k=1$，条件 $s=(1-s)^2$ 给出 $\sin\alpha=\frac{1}{2}(3-\sqrt{5})\approx 0.382$，所以 $\alpha\approx 22.46^\circ$，$\ddot{x}\approx -0.413g$。把这些代入 (1)、(2) 和竖直方程，三条都成立。
- 我们以数值方法模拟了完整的双变量运动（以 x 和绳子的角度为变量），从这个角度开始并让环在运动中：角度在 10^{-10} rad 的误差内保持不变，而环的减速度恰好是 $g\tan\alpha$。若从稍为不同的角度开始，角度会立即开始改变，可见 α 这个特殊值确实关键。
- 极限情况：当 $k\to 0$（质点非常轻），$\alpha\to 0$ 且 $\ddot{x}\to 0$；当 $k\to\infty$，$\alpha\to 90^\circ$，减速度无限增大，因为轻环正被一个重质点拖动。
- 正负号：$\ddot{x}<0$, 所以环的加速度总是指向 O。这是合理的：环所受的水平合力 $-T(1-\sin\alpha)$ 指向 O。

常见错误

- 忘记环两边都受到绳子的作用；正是沿轨道指向 O 的拉力令 (2) 成立。
- 把 P 的水平加速度写成 $\ddot{x}$；悬垂部分的长度 $L-x$ 也在改变，这会贡献 $-\ddot{x}\sin\alpha$ 一项。
- 微分时把 α 当作变量。这里它是常数，而这正是问题得以处理的原因。

STEP 之外

这是一个有两个自由度（degrees of freedom）的系统（环的位置和绳子的角度），题目要找的是其中一个自由度保持不变的特殊解，颇有相对平衡（relative equilibrium）的意味。在大学一年级的课程中，你会以 x 和角度写出拉格朗日量（Lagrangian），并发现只有在这里求得的那一个 α 值下，角度不变的运动才有可能；接下来自然要问的是，这种

运动是否稳定（stable）。Kleppner 和 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）对这类约束系统（constrained systems）有很好的讲解。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。