详细解答

STEP II 2014，第 10 题

力学 • 轨道的包络线

STEP II 2014，第 10 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q10

本题在 *Beyond STEP* 第 11.9 节安全抛物线中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch11/safety-parabola.html

关键思路

消去时间后，轨迹（trajectory）方程是一个关于 $\lambda = \tan\theta$ 的二次方程（*quadratic*），因为 $\sec^2\theta = 1 + \lambda^2$。固定一点 (x, y)，然后问：是否存在某个发射角，使轨迹经过这一点？这等同于问这个关于 λ 的二次方程是否有实根，所以判别式（discriminant）就给出可到达区域的边界。至于最后一部分，边界曲线原来是一条焦点（focus）在 O 的抛物线，这使得计算与 O 的距离变得非常容易。

解答

轨迹

把抛射体（projectile）视为在重力作用下自由运动的质点（particle），不计空气阻力。经过时间 t 后，

$$x = ut\cos\theta, \qquad y = ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

由于 $\cos\theta \neq 0$（该角小于直角），$t = x/(u\cos\theta)$，代入得

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2\cos^2\theta}.$$

利用 $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta = 1 + \lambda^2$，得笛卡儿方程（Cartesian equation）

$$\boxed{y = \lambda x - \frac{gx^2}{2u^2}\left(1 + \lambda^2\right).}$$

给定 x 上方的最大高度 Y

固定 u，并固定 $x > 0$。此时 y 只是 λ 的函数，可以改写为

$$\frac{gx^2}{2u^2}\lambda^2 - x\lambda + \left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) = 0.$$

? **想一想** 为甚么要把它看成关于 λ 的方程，而不是关于 y 的方程?

某个值 y 会在这个 x 的上方出现，当且仅当有某个发射角能产生它，即这个二次方程有实根 λ。因此其判别式必须非负：

$$x^2 - 4 \cdot \frac{gx^2}{2u^2}\left(\frac{gx^2}{2u^2} + y\right) \geq 0.$$

除以 $x^2 > 0$，再乘以 $u^2/(2g) > 0$，这不会改变不等式的方向，得

$$\frac{u^2}{2g} \geq \frac{gx^2}{2u^2} + y \iff y \leq \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}.$$

所以

$$\boxed{Y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}}$$

而且没有任何轨迹在这个 x 的上方高于 Y。

我们还需要证明*不超过* Y 的每一个值都能以真正的发射角（即 $\lambda > 0$）达到。作为 λ 的函数，y 是开口向下的二次函数。其顶点（vertex）在 $\lambda_0 = u^2/(gx) > 0$，此处 $y = Y$（代入验证即可）。当 $\lambda \geq \lambda_0$ 时，y 连续（continuous）且递减，并且当 $\lambda \to \infty$ 时 $y \to -\infty$。所以由连续性，每个值 $y \leq Y$ 都会在某个 $\lambda \geq \lambda_0 > 0$ 取得，即在某个 $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ 取得。因此 y 的取值正是整个区间 $y \leq Y$，符合所求。（当 $x = 0$ 时，我们必须垂直向上抛。此时 y 由 0 变到 $u^2/(2g)$，同样等于 $Y(0)$。）

若容许向任一方向抛射，则 $x < 0$ 的情况是镜像，同一公式依然成立，因为 Y 只取决于 x^2。

图像与可到达区域

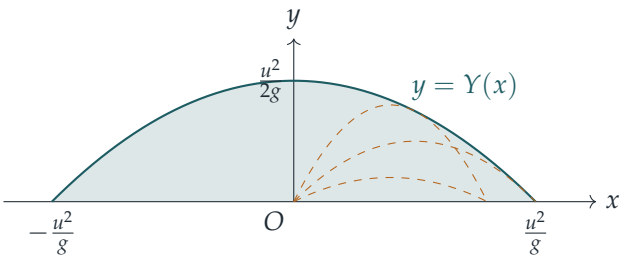
Y 的图像是一条开口向下的抛物线。其顶点在 $(0,\, u^2/2g)$，即可能达到的最大高度；它与地面相交于 $x = \pm u^2/g$，即可能达到的最大射程。每一条轨迹都位于这条曲线之下，并在 $\lambda = \lambda_0$ 处与它相切一次。因此它常被称为*包络抛物线*（bounding parabola）或*安全抛物线*（parabola of safety）。

质点一碰到地面便停下。取一条 $\lambda > 0$ 的轨迹上一点，其中 $y \geq 0$ 且 $x > 0$。在 O 与该点之间的所有 x，这条轨迹都在地面之上，所以质点确实会在落地前到达该点。因此可到

达的集合是区域

$$0 \le y \le \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}, \qquad |x| \le \frac{u^2}{g},$$

即下图的阴影部分。图中以 u^2/g 为单位，虚线是三条示例轨迹。



与 O 的最远距离

任何可到达的点 P 都位于由 O 到点 Q 的线段上，其中 Q 是射线 OP 与边界的交点。该区域以包络抛物线和地面为边界，而且沿每条射线都包含 O 与边界之间的所有点。所以 $OP \le OQ$，我们只需在边界上求距离的最大值。在地面上，最远的点距离为 u^2/g。在曲线部分，$y = Y(x)$，所以

$$\begin{aligned} OQ^2 = x^2 + Y^2 &= x^2 + \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 - 2 \cdot \frac{u^2}{2g} \cdot \frac{gx^2}{2u^2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 \\ &= \left(\frac{u^2}{2g}\right)^2 + \frac{x^2}{2} + \left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)^2 = \left(\frac{u^2}{2g} + \frac{gx^2}{2u^2}\right)^2. \end{aligned}$$

所以 $OQ = \dfrac{u^2}{2g} + \dfrac{gx^2}{2u^2} = \dfrac{u^2}{g} - Y$。换句话说，与 O 的距离等于向下到直线 $y = u^2/g$ 的距离：O 是包络抛物线的焦点，而 $y = u^2/g$ 是它的准线（directrix）。当 Y 最小时这个距离最大，而在曲线的可到达部分上，Y 的最小值是 $Y = 0$，位于 $x = \pm u^2/g$。因此抛射体能到达的与 O 的最远距离是

$$\boxed{\frac{u^2}{g}},$$

这正是最大水平射程，在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时达到。边界上每个高度 $y > 0$ 的点都较近，恰好近 y。

验算

- 代入 $x = 0$：$Y = u^2/(2g)$，即垂直向上抛时达到的高度（由 $v^2 = u^2 - 2gh$ 得出）。代入 $Y = 0$：$x = u^2/g$，即熟悉的最大射程 $u^2 \sin 2\theta/g$（在 $\theta = \frac{\pi}{4}$ 时）。
- 取 $u^2/g = 10$（例如 $u = \sqrt{98}\,\mathrm{m\,s^{-1}}, g = 9.8$）。在 $x = 4$ 时，公式给出 $Y = 5 - 0.8 = 4.2$，在 $\lambda_0 = 10/4 = 2.5$ 时达到：确实 $2.5 \cdot 4 - \frac{1}{20} \cdot 16 \cdot 7.25 = 10 - 5.8 = 4.2$。

- 以电脑对大量发射角和时间进行搜索，取 $u = 10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$，找到与 O 最远的点距离为 $10.204\ \mathrm{m} = u^2/g$，位于地面上。

常见错误

- 只做到判别式便停下。判别式只显示 $y \le Y$ 是必要的，但题目还要求每个这样的值都能以位于地面之上的真正发射角达到。
- 把 $y = Y$ 之下的整个区域都涂上阴影，包括地面以下的点。质点落地便停下，所以可到达的集合还需满足 $y \ge 0$。
- 以为最远的点是安全抛物线的顶点。该点与 O 的距离只有 $u^2/(2g)$，是射程的一半。

STEP 之外

包络抛物线是这族轨迹的*包络线*（envelope）：即与族中每一条曲线都相切的曲线。求包络线的一个标准方法，是在 $F(x,y,\lambda) = 0$ 与 $\partial F/\partial\lambda = 0$ 之间消去参数，而这正是我们所用的重根条件。这里还有一个与能量的联系：每条轨迹都有同一条准线，即直线 $y = u^2/(2g)$，那正是全部动能（kinetic energy）都转化为势能（potential energy）时的高度。Kleppner 与 Kolenkow 所著的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）以大学一年级程度讲解抛射运动与能量。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。