详细解答

STEP II 2014，第 1 题

纯数学 · 三角形几何与二次方程

STEP II 2014，第 1 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s2-q1

关键思路

沿着锯齿形路线 $A \to P \to Q \to B$ 由 A 走到 B。三段路的长度都是 x，合起来必须刚好走过水平距离 1，而净上升高度为 0。分别沿水平及铅直方向分解（resolving），得到 $x\cos\theta$ 和 $x\sin\theta$，再利用 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 消去未知角。之后的一切，就只是一条关于 x 的二次方程（quadratic equation）及其判别式（discriminant）。

解答

把 A 放在原点，B 放在 $(1,0)$，而 C 在 AB 上方。由于 P 位于由 A 出发经过 C 的射线（ray）上，与 A 的距离为 x；而 Q 位于由 B 出发经过 C 的射线上，与 B 的距离为 x，所以

$$P = (x\cos\alpha,\ x\sin\alpha), \qquad Q = (1 - x\cos\beta,\ x\sin\beta).$$

第 (i) 部分

水平方向。$\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{PQ}$ 和 $\overrightarrow{QB}$ 的水平分量（component）分别为 $x\cos\alpha$、$x\cos\theta$ 和 $x\cos\beta$，它们之和等于 $AB = 1$。因此

$$x\cos\theta = 1 - x\cos\alpha - x\cos\beta,$$

这就是第一个结果。（以坐标来说：这是 Q 与 P 的 x 坐标之差。）

铅直方向。P 的高度为 $x\sin\alpha$，Q 的高度为 $x\sin\beta$，所以

$$x\sin\theta = x\sin\beta - x\sin\alpha.$$

（这个值永不为负：由于三角形的内角和小于 $180°$，有 $\alpha \le \beta < 180° - \alpha$，而在这个区间上 $\sin\beta \ge \sin\alpha$。所以 Q 永远不会低于 P。）

消去 θ。把两式平方后相加，并利用 $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$，得

$$x^2=(1-x(\cos\alpha+\cos\beta))^2+x^2(\sin\beta-\sin\alpha)^2.$$

展开右方，x^2 的系数为

$$\begin{aligned}(\cos\alpha+\cos\beta)^2+(\sin\beta-\sin\alpha)^2&=(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+(\cos^2\beta+\sin^2\beta)\\&\quad+2(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)\\&=2+2\cos(\alpha+\beta).\end{aligned}$$

所以 $x^2=1-2(\cos\alpha+\cos\beta)x+(2+2\cos(\alpha+\beta))x^2$。把 x^2 移到右方，得

$$(1+2\cos(\alpha+\beta))x^2-2(\cos\alpha+\cos\beta)x+1=0, \qquad (*)$$

此即所求。

P 和 Q 在两边的延长线上。若 P 位于 AC 的延长线（produced）上，它仍然在由 A 出发经过 C 的射线上，与 A 的距离为 x，所以其坐标仍是 $(x\cos\alpha, x\sin\alpha)$。同理，$Q$ 仍是 $(1-x\cos\beta, x\sin\beta)$。上面的推导并没有用到其他东西：由 P 到 Q 的位移为

$$(1-x\cos\alpha-x\cos\beta,\ x\sin\beta-x\sin\alpha),$$

而 $PQ^2=x^2$ 给出完全相同的方程 $(*)$。(此时 x 可以大于 AC 和 BC，而 $1-x\cos\alpha-x\cos\beta$ 可以是负数，所以 θ 可以是钝角。这并无影响，因为平方后正负号便消失了。)

第 (ii) 部分

方程 $(*)$ 是线性方程，当且仅当 $1+2\cos(\alpha+\beta)=0$，即 $\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{2}$。由于 $0<\alpha+\beta<180^\circ$，唯一的可能是

$$\alpha+\beta=120^\circ.$$

否则 $(*)$ 是一条真正的二次方程，其判别式的四分之一为

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{4}\Delta&=(\cos\alpha+\cos\beta)^2-(1+2\cos\alpha\cos\beta-2\sin\alpha\sin\beta)\\&=\cos^2\alpha+\cos^2\beta-1+2\sin\alpha\sin\beta\\&=1-\sin^2\alpha-\sin^2\beta+2\sin\alpha\sin\beta\\&=1-(\sin\beta-\sin\alpha)^2,\end{aligned}$$

这里用了 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$ 及 $\cos^2\beta-1=-\sin^2\beta$。

> ? **想一想** 为甚么 $(\sin\beta-\sin\alpha)^2$ 必定小于 1?

两个角都严格介乎 0° 与 180° 之间，所以 $0<\sin\alpha\le 1$ 及 $0<\sin\beta\le 1$。两个属于 $(0,1]$ 的数之差严格介乎 -1 与 1 之间。因此 $(\sin\beta-\sin\alpha)^2<1$，故 $\Delta>0$，而 $(*)$ 有两个相异实根。

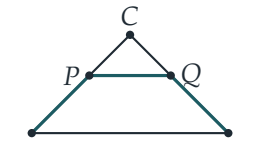
第 (iii) 部分

(a) $\alpha=\beta=45^\circ$。此时 $\cos(\alpha+\beta)=\cos 90^\circ=0$ 且 $\cos\alpha+\cos\beta=\sqrt{2}$，所以 $(*)$ 为

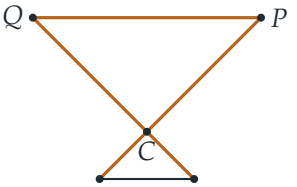
$$x^2-2\sqrt{2}\,x+1=0,\qquad x=\sqrt{2}\pm 1.$$

这个三角形是等腰直角三角形，$C=(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，且 $AC=BC=\frac{1}{\sqrt{2}}\approx 0.707$。

- $x=\sqrt{2}-1\approx 0.414<AC$：$P$ 和 Q 位于两边上，分别在 $P=(1-\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $Q=(\frac{1}{\sqrt{2}},1-\frac{1}{\sqrt{2}})$。由对称性，$PQ$ 与 AB 平行，所以 $\theta=0$。验证：$PQ=\sqrt{2}-1=x$。
- $x=\sqrt{2}+1\approx 2.414>AC$：$P$ 和 Q 分别位于 AC 的延长线和 BC 的延长线上，在 $P=(1+\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}})$ 和 $Q=(-\frac{1}{\sqrt{2}},1+\frac{1}{\sqrt{2}})$。两条延长线已在 C 点相交而过，所以现在 P 在 Q 的*右方*。PQ 同样是水平的，长度为 $1+\sqrt{2}=x$。



$x=\sqrt{2}-1$

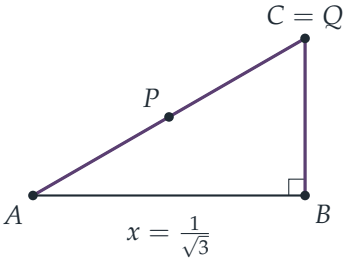


$x=\sqrt{2}+1$

(b) $\alpha=30^\circ$，$\beta=90^\circ$。现在 $\alpha+\beta=120^\circ$，所以这正是第 (ii) 部分中的线性情况。由于 $\cos\alpha+\cos\beta=\frac{\sqrt{3}}{2}$，$(*)$ 变成

$$-\sqrt{3}\,x+1=0,\qquad x=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

这个三角形的直角在 B，$BC=\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}$，而 $AC=\frac{2}{\sqrt{3}}$。所以 $QB=BC$ 表示 Q 就是 C，而 $AP=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}AC$ 使 P 位于 AC 的中点。于是 $PQ=PC=\frac{1}{\sqrt{3}}=x$，正如所料。这是唯一的可能。



$x=\frac{1}{\sqrt{3}}$

第二个根去了哪里？若 $\alpha+\beta=120^\circ$，直线 AC 和 BC 相交成 60°。当 x 非常大时，沿这两条直线远处的点 P 和 Q 之间的距离便几乎刚好是 x，与 C 组成一个近乎等边的三角形。当 $\alpha+\beta\to 120^\circ$ 时，二次方程的其中一个根便趋向无穷大。

验算

- 在 (a) 中，$(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)=1$，与两根之积 $1/(1+2\cos 90^\circ)=1$ 吻合。
- 对任意一个三角形，例如 $\alpha=40^\circ$、$\beta=70^\circ$，解 $(*)$，定出 P 和 Q 的位置并量度 PQ：对两个根而言，它都等于 x。我们已用电脑对许多随机三角形验证过这一点，误差约为 10^{-10}。
- 在 (b) 中，$x=1/\sqrt{3}\approx 0.577$ 刚好等于 BC，而 AC 的中点为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2\sqrt{3}})$，与 $C=(1,\frac{1}{\sqrt{3}})$ 的距离为 $\frac{1}{\sqrt{3}}$。

常见错误

- 把 $\cos\beta$ 项的正负号弄错：$\overrightarrow{QB}$ 是朝向 B 的，所以即使 Q 在 B 的左方，其水平分量仍是 $+x\cos\beta$。
- 在第 (ii) 部分中容许 $\alpha+\beta=240^\circ$。三角形的内角和小于 180°。
- 在 (b) 中，首项系数为零时仍试图使用二次公式，或断定方程无解。

STEP 之外

把一个封闭的向量多边形分解成分量，再用 $\cos^2+\sin^2=1$ 消去一个角，是运动学（kinematics）和连杆（linkage）问题中的标准技巧：我们的锯齿形路线就是一个简单的三杆连杆。当二次方程退化为线性方程时“逃往无穷远”的那个根，让我们初次窥见射影几何（projective geometry）。在射影几何中，平行线相交于无穷远点，而只要把这些点也计算在内，二次方程总有两个根。Coxeter 与 Greitzer 合著的 *Geometry Revisited*（《几何再探》）是在这个程度上踏入古典几何的绝佳入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。