详细解答

STEP I 2014，第 9 题

力学 · 受水平力作用的抛体

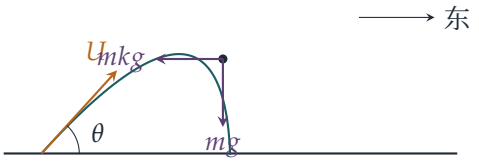
> **STEP I 2014，第 9 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q9

关键思路

两个力都是恒定的，所以每个方向上的加速度（acceleration）都是常数，我们可以把水平运动和竖直运动分开处理，做法和普通抛射体（projectile）完全一样。竖直运动完全不受向西的力影响。新的地方在于水平速度不断减少，所以质点会在某一刻停止向东移动，然后往西飘回去。整条轨迹的形状取决于这一刻何时出现，以及它与飞行最高点和落地时刻的先后关系。

解答

把质点视为在竖直平面内运动的质点（point mass），除了重量和题目给出的水平力之外不受其他力。取 x 向东、y 竖直向上，原点设在抛出点。



时间 T_H 与 T_L

在每个方向上应用牛顿第二定律（Newton's second law），再除以 m，得

$$\ddot{x} = -kg, \qquad \ddot{y} = -g.$$

初速度为 $(U\cos\theta,\ U\sin\theta)$，所以积分两次，得

$$\dot{x} = U\cos\theta - kgt, \qquad x = Ut\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgt^2,$$
$$\dot{y} = U\sin\theta - gt, \qquad y = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2.$$

当 $\dot{y} = 0$ 时到达最大高度，而质点在 $y = 0$ 且 $t > 0$ 时落地：

$$\boxed{T_H = \frac{U\sin\theta}{g}, \qquad T_L = \frac{2U\sin\theta}{g}.}$$

这些结果与没有向西的力时相同，因为那个力没有竖直分量。

T 的意义

题目给出的时间 $T = \dfrac{U\cos\theta}{kg}$ 正是 $\dot{x} = 0$ 的时刻。在 T 之前质点向东移动；在 T 之后它向西移动。所以，如果质点在时刻 T 仍在空中，那就是它位于最东的时刻。比较这三个时间：

$$\frac{T_H}{T} = \frac{U\sin\theta}{g}\cdot\frac{kg}{U\cos\theta} = k\tan\theta, \qquad \frac{T_L}{T} = 2k\tan\theta.$$

知道质点在哪里落地也会有帮助：

$$x(T_L) = T_L\left(U\cos\theta - \tfrac{1}{2}kgT_L\right) = \frac{2U^2\sin\theta}{g}(\cos\theta - k\sin\theta) = \frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta).$$

若 $k\tan\theta < 1$，这个值为正（在起点以东）；若 $k\tan\theta > 1$，则为负（在起点以西）。

> ? **想一想** 轨迹不再对称，那么它实际上是甚么样子?

加速度 $(-kg, -g)$ 是常数，所以轨迹仍然是抛物线（parabola），只是它的对称轴倾斜了：这就是在大小为 $g\sqrt{1+k^2}$、指向西下方的“重力”作用下所得到的抛物线。飞行的最高点不再是抛物线的顶点，而下面三种情况讨论的，就是最东点（时刻 T）落在甚么位置。

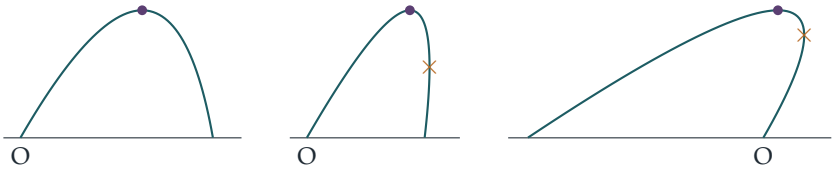
三种情况

情况 $k\tan\theta < \frac{1}{2}$。此时 $T_H < T_L < T$。质点在向东的速度耗尽之前已经落地，所以全程向东移动。轨迹看起来像普通的抛射轨迹，上升到最高点后下降，而由于水平速率不断减少，下降时比上升时更陡。它落在起点以东。

情况 $\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$。此时 $T_H < T < T_L$。质点在仍向东移动时经过最高点，下降时继续向东，直到时刻 T，此时它的速度竖直向下，之后便向西弯回，然后落地。由于 $k\tan\theta < 1$，它仍然落在起点以东，但在其最东点以西。

情况 $k\tan\theta > 1$。此时 $T < T_H$。质点仍在上升时，向东的运动已经停止，那一刻它正竖直向上移动。它在已经向西移动时才到达最大高度，然后下降并落在抛出点以西。

下面的草图展示了这三种情况，取 $\theta = 60°$，而 U 和 g 相同，分别有 $k\tan\theta \approx 0.35$、0.6 和 1.8。圆点标示时刻 T_H 的最高点，叉号标示时刻 T 的最东点，O 为抛出点。



$k\tan\theta < \frac{1}{2}$　　$\frac{1}{2} < k\tan\theta < 1$　　$k\tan\theta > 1$

$k\tan\theta = 1$ 的情况

此时 $T = T_H$，所以在飞行最高点时，速度的两个分量同时为零，质点瞬间静止。此外 $x(T_L) = 0$，所以它落回抛出点。

事实上，质点沿一条直线运动。当 $\tan\theta = 1/k$ 时，初速度 $U(\cos\theta, \sin\theta)$ 是 $(k, 1)$ 的正数倍，而加速度 $(-kg, -g) = -g(k, 1)$ 恰好指向相反方向。一个加速度恒定且与速度方向正好相反的质点会沿直线运动：它沿抛射线向上移动，以 $g\sqrt{1+k^2}$ 减速，在时刻 T_H 停下，然后沿同一直线滑回，在时刻 $T_L = 2T_H$ 落回起点。你可以从方程验证这一点：取 $k = \cot\theta$，

$$x\tan\theta = Ut\sin\theta - \tfrac{1}{2}gt^2 = y \quad \text{对所有} t,$$

所以质点始终不离开直线 $y = x\tan\theta$。

验算

- 令 $k \to 0$，则 $T \to \infty$，所以永远属于第一种情况，而 $x(T_L)$ 变成熟悉的射程 $U^2\sin 2\theta/g$。
- 落地位置 $\frac{2U^2\sin\theta\cos\theta}{g}(1 - k\tan\theta)$ 恰好在 $k\tan\theta = 1$ 时变号，与第二、第三种情况的分界吻合。
- 取 $U = g = 1$、$\theta = 60°$ 和 $k = 0.45$，质点落在 $x \approx 0.191$，但在时刻 $T \approx 1.11$ 到达 $x = \frac{\cos^2\theta}{2k} \approx 0.278$，该时刻介于 $T_H \approx 0.87$ 与 $T_L \approx 1.73$ 之间，所以它确实在落地前折返。对运动进行逐步数值积分（numerical integration），结果与三个时间及落地点全部吻合。

常见错误

- 让向西的力影响竖直运动：T_H 和 T_L 完全不涉及 k。
- 假设最高点就是轨迹的“中间”。有了水平力，轨迹是一条倾斜的抛物线，所以最高点和最东点并不相同。

▶ 把第二种情况画成质点落在起点以西：它虽然折返，但由于 $k\tan\theta < 1$，折返得不够远。

STEP 之外

任何方向上的恒定加速度总会产生抛物线。这里的等效重力只是倾斜了，把坐标轴旋转至与它对齐，问题便变回普通的抛射体问题。这种选取与受力相配合的坐标的想法，是大学一年级力学的核心内容；同样重要的还有均匀电场中的带电粒子，它们的行为正是如此。Kleppner 与 Kolenkow 的 *An Introduction to Mechanics*（《力学导论》）细致地发展了这些想法。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。