详细解答

STEP I 2014，第 8 题

纯数学 · 直线族的包络线

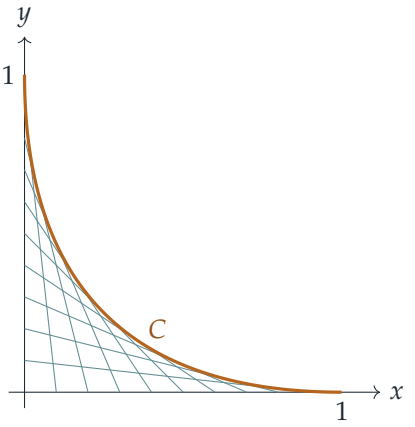
STEP I 2014，第 8 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s1-q8

关键思路

把每条直线写成截距式（intercept form）$\frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1$；这样，两条直线的交点便可从一对线性方程中直接求出，而且结果对 a 和 b 是对称的。令 $b\to a$，便得到一条直线与其“邻居”的交点，这些点描出一条曲线，而每条直线 L_a 都与这条曲线相切。曲线 C 就是这族直线的包络线（envelope），而第 (iii) 部分则从另一个方向证实这一点。



解答

经过 $(a,0)$ 和 $(0,1-a)$ 的直线，其截距（intercept）为 a 和 $1-a$，所以

$$L_a:\ \frac{x}{a}+\frac{y}{1-a}=1,\qquad \text{即}\qquad (1-a)x+ay=a(1-a).$$

第 (i) 部分

我们解

$$(1-a)x + ay = a(1-a),$$
$$(1-b)x + by = b(1-b).$$

为了消去 y，把第一条方程乘以 b，第二条乘以 a，然后相减：

$$[b(1-a) - a(1-b)]x = ab(1-a) - ab(1-b), \qquad \text{即} \qquad (b-a)x = ab(b-a).$$

由于 $a \neq b$，我们可以除以 $b-a$，得 $x = ab$。代入第一条方程，

$$ay = a(1-a) - (1-a)ab = a(1-a)(1-b),$$

又因 $a \neq 0$，得 $y = (1-a)(1-b)$。所以 L_a 与 L_b 相交于

$$(ab,\ (1-a)(1-b)).$$

（答案对 a 和 b 对称，这是理所当然的。你也可以验证它同样位于 L_b 上：$(1-b)ab + b(1-a)(1-b) = b(1-b)(a+1-a) = b(1-b)$。）

第 (ii) 部分

两个坐标都是 b 的多项式（polynomial），因此是连续（continuous）的，所以当 $b \to a$ 时的极限（limit）就是在 $b = a$ 处的值：

$$(x, y) = (a^2,\ (1-a)^2).$$

由于 $0 < a < 1$，我们有 $0 < x = a^2 < 1$，又因为 $a > 0$，取正平方根便得 $\sqrt{x} = a$。因此

$$y = (1-a)^2 = (1-\sqrt{x})^2,$$

所以极限点位于 C 上，得证。

第 (iii) 部分

在 C 上任取一点。它的 x 坐标位于 $(0,1)$ 之内，所以可以写成 t^2，其中 $t = \sqrt{x} \in (0,1)$，而该点就是 $(t^2, (1-t)^2)$。

用链式法则（chain rule）对 $y = (1-\sqrt{x})^2$ 求导，

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 2(1-\sqrt{x}) \cdot \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = -\frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt{x}},$$

在 $x = t^2$ 处其值为 $-\frac{1-t}{t}$。该处的切线（tangent）为

$$y - (1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}\,(x - t^2).$$

想一想 我们怎样看出这条直线是其中一条 L_a?

一条直线 L_a 由它的两个截距完全确定，而这两个截距必须是 a 和 $1-a$。所以，求出切线的截距。

- 令 $y=0$：$-(1-t)^2 = -\frac{1-t}{t}(x-t^2)$。由于 $1-t \neq 0$，可以约去，得 $x-t^2 = t(1-t)$，所以 $x=t$。
- 令 $x=0$：$y=(1-t)^2+\frac{1-t}{t}t^2 = (1-t)^2+t(1-t) = 1-t$。

所以切线经过 $(t,0)$ 和 $(0,1-t)$，且 $0<t<1$：它正是 L_t。由于 C 上每一点都由某个 $t\in(0,1)$ 给出，C 的每条切线都具有 L_a 的形式（在切点处 $a=\sqrt{x}$）。证明完毕。

留意在 $\left(a^2,(1-a)^2\right)$ 处的切线是 L_a，而这一点正是第 (ii) 部分由 L_a 得出的点：每条直线都在它自己的极限交点处与 C 相切。

验算

- 取 $a=\frac{1}{2}$、$b=\frac{1}{3}$，第 (i) 部分给出 $\left(\frac{1}{6},\frac{1}{3}\right)$。在 $L_{1/2}$ 上：$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$；在 $L_{1/3}$ 上：$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$。
- 在 $x=\frac{1}{4}$ 处，曲线的 $y=\frac{1}{4}$，斜率为 -1，所以切线是 $x+y=\frac{1}{2}$，即经过 $(\frac{1}{2},0)$ 和 $(0,\frac{1}{2})$ 的 $L_{1/2}$。
- 曲线本身是抛物线（parabola）$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ 的一部分，对 x 和 y 对称，与这族直线的对称性 $a\leftrightarrow 1-a$ 吻合。

常见错误

- 在第 (ii) 部分忘记解释为何 $\sqrt{x}=a$：这需要 $a>0$，而题目已给出此条件。
- 在第 (iii) 部分只证明了 L_a 与 C 相切。题目要求的是逆命题：从 C 的任意一条切线出发，证明它是某条 L_a。

STEP 之外

曲线 C 是直线族 L_a 的*包络线*：即与族中每一条直线都相切的曲线。一般而言，曲线族 $F(x,y,a)=0$ 的包络线，可以从 $F=0$ 和 $\partial F/\partial a=0$ 中消去 a 而求得，这正是第 (ii) 部分“令 $b\to a$”取极限的微积分版本。包络线在光学中以焦散线（caustics）的形式出现，例如咖啡杯中那条明亮的光线曲线。Siklos 的 *Advanced Problems in Mathematics*（《高等数学难题》）收录了更多同类题目。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。