详细解答

STEP I 2014，第 7 题

纯数学 • 三角形中的向量

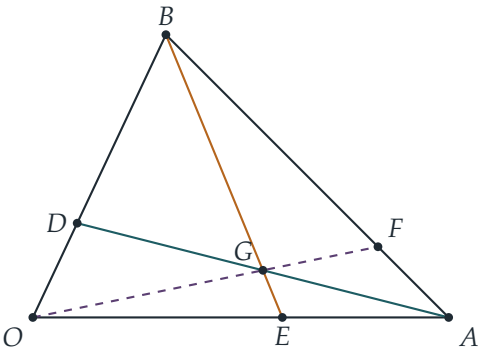
STEP I 2014，第 7 题

继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：

step.maths.org/questions/14-s1-q7

关键思路

把每一点都写成 **a** 与 **b** 的组合。经过两个已知点的直线上的点，有一条单参数的向量方程（vector equation），所以 G 可以用两种方式表示，每条直线各给出一种。由于 **a** 与 **b** 不平行（三角形并非退化），我们可以比较系数（comparing coefficients），从而得到关于两个参数的两条简单方程。



解答

首先确定 D 和 E 的位置。由于 $BD = r\,DO$，点 D 位于由 O 到 B 的路程的 $\frac{1}{1+r}$ 处；由于 $OE = s\,EA$，点 E 位于由 O 到 A 的路程的 $\frac{s}{1+s}$ 处。所以

$$\mathbf{d} = \frac{1}{1+r}\,\mathbf{b}, \qquad \mathbf{e} = \frac{s}{1+s}\,\mathbf{a}.$$

第 (i) 部分

直线 AD 上的一般点为

$$\mathbf{a}+\lambda(\mathbf{d}-\mathbf{a})=(1-\lambda)\,\mathbf{a}+\frac{\lambda}{1+r}\,\mathbf{b},$$

而直线 BE 上的一般点为

$$\mathbf{b}+\mu(\mathbf{e}-\mathbf{b})=\frac{\mu s}{1+s}\,\mathbf{a}+(1-\mu)\,\mathbf{b}.$$

在 G 处，两者相等。

? **想一想** 为甚么我们可以分别令 **a** 的系数相等及 **b** 的系数相等?

因为 O、A、B 构成一个真正的三角形，所以 **a** 与 **b** 都不是零向量，而且互不平行。若 $\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}=\alpha'\mathbf{a}+\beta'\mathbf{b}$ 而 $\alpha\neq\alpha'$，则 **a** 便会是 **b** 的倍数，这是不可能的。所以

$$1-\lambda=\frac{\mu s}{1+s},\qquad \frac{\lambda}{1+r}=1-\mu.$$

由第二条方程得 $\lambda=(1+r)(1-\mu)$。代入第一条方程，

$$\begin{aligned}1-(1+r)(1-\mu)&=\frac{\mu s}{1+s}\\ \mu\left[(1+r)-\frac{s}{1+s}\right]&=r\\ \mu\,\frac{(1+r)(1+s)-s}{1+s}&=r\\ \mu\,\frac{1+r+rs}{1+s}&=r,\end{aligned}$$

所以

$$\mu=\frac{r(1+s)}{1+r+rs}.$$

由于 $r,s>0$，有 $1+r+rs>0$，所以这一步是容许的。把这个 μ 值代入 BE 的方程，**a** 的系数为

$$\frac{\mu s}{1+s}=\frac{rs}{1+r+rs},$$

而 **b** 的系数为

$$1-\mu=\frac{1+r+rs-r-rs}{1+r+rs}=\frac{1}{1+r+rs}.$$

因此

$$\mathbf{g}=\frac{rs}{1+r+rs}\,\mathbf{a}+\frac{1}{1+r+rs}\,\mathbf{b},$$

得证。

第 (ii) 部分

由于直线 OG 经过原点，其上每一点都是 $\mathbf{g}$ 的纯量倍数 $k\mathbf{g}$：

$$k\mathbf{g} = \frac{k}{1+r+rs}\,(rs\,\mathbf{a} + \mathbf{b}).$$

由于 AB 由点 $(1-\nu)\mathbf{a} + \nu\mathbf{b}$ 组成，点 $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}$ 位于直线 AB 上当且仅当 $\alpha + \beta = 1$。所以在 F 处我们需要 $k(rs+1) = 1 + r + rs$，于是

$$\mathbf{f} = \frac{rs}{1+rs}\,\mathbf{a} + \frac{1}{1+rs}\,\mathbf{b}.$$

另一方面，$AF = t\,FB$ 表示 F 位于由 A 到 B 的路程的 $\frac{t}{1+t}$ 处：

$$\mathbf{f} = \frac{1}{1+t}\,\mathbf{a} + \frac{t}{1+t}\,\mathbf{b}.$$

比较 $\mathbf{a}$ 的系数（理由与前面相同）得 $1 + t = \dfrac{1+rs}{rs}$，所以

$$t = \frac{1}{rs}.$$

$\mathbf{b}$ 的系数亦相符：$\dfrac{t}{1+t} = \dfrac{1/(rs)}{(1+rs)/(rs)} = \dfrac{1}{1+rs}$。

验算

- **中线**。当 $r = s = 1$ 时，D 和 E 是中点，所以 G 应该是重心（centroid）。公式给出 $\mathbf{g} = \frac{1}{3}\mathbf{a} + \frac{1}{3}\mathbf{b}$，这是正确的；而 $t = 1$，所以 F 是 AB 的中点。这是必然的，因为三条中线（median）共点（concurrent）。
- **塞瓦定理**。答案表明 $r \cdot s \cdot t = 1$，即 $\dfrac{BD}{DO} \cdot \dfrac{OE}{EA} \cdot \dfrac{AF}{FB} = 1$，这正是共点直线 AD、BE、OF 的塞瓦定理（Ceva's theorem）。
- **一个数值例子**。取 $\mathbf{a} = (5,0)$、$\mathbf{b} = (0,5)$、$r = 2$、$s = 3$。那么 $D = (0, \frac{5}{3})$、$E = (\frac{15}{4}, 0)$，而公式给出 $G = (\frac{30}{9}, \frac{5}{9}) = (\frac{10}{3}, \frac{5}{9})$。这点位于方程为 $x + 3y = 5$ 的 AD 上，亦位于方程为 $4x + 3y = 15$ 的 BE 上。直线 OG 与 $x + y = 5$ 相交于 $F = (\frac{30}{7}, \frac{5}{7})$，而 $\overrightarrow{AF} = (-\frac{5}{7}, \frac{5}{7})$、$\overrightarrow{FB} = (-\frac{30}{7}, \frac{30}{7})$，所以 $AF : FB = 1 : 6$，得 $t = \frac{1}{6} = \frac{1}{rs}$。这些公式亦已用电脑以精确算术，对二千个随机三角形及比例验证过。

常见错误

- 把比例弄反：$BD = r\,DO$ 使 D 位于由 O 到 B 的路程的 $\frac{1}{1+r}$ 处，而不是 $\frac{r}{1+r}$ 处。
- 比较系数时没有说明为何可行：这需要 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 不平行。
- 在第 (ii) 部分忘记把 $\mathbf{g}$ 重新缩放：G 本身并不在 AB 上，因为它的系数之和小于 1。

STEP 之外

像 **f** 的系数那样总和为 1 的系数，称为重心坐标（barycentric coordinates）。它们以各顶点上的权重来描述点，并使塞瓦定理和梅涅劳斯（Menelaus）定理等结果几乎水到渠成。用线性代数（linear algebra）的语言来说，比较系数之所以可行，是因为 **a** 与 **b** 线性独立（linearly independent），因而构成平面的一组基（basis）。Strang 的 *Introduction to Linear Algebra*（《线性代数导论》）对基和坐标有细致的阐述。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。