详细解答

STEP I 2014，第 6 题

纯数学 · 逻辑斯谛映射的递推关系

> **STEP I 2014，第 6 题**
>
> 继续阅读之前，请先看题目（原题为英文）。题目载于 STEP Support Programme 的试题资料库：
>
> step.maths.org/questions/14-s1-q6

本题在 *Beyond STEP* 第 8.7 节可以解出的混沌中有完整的引导式讲解：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/ch08/solvable-chaos.html

关键思路

表达式 $4x(1-x)$ 看起来很别扭，但只要令 $x = \sin^2\theta$，便有 $1-x = \cos^2\theta$，而 $4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2$ 其实是乔装了的二倍角公式（double-angle formula）。递推关系（recurrence）的每一步只是把角度加倍。第 (ii) 部分的重点则在于认出：只要系数（coefficients）满足某一个条件，任何二次递推关系都可以通过线性变量代换（linear change of variable）化为这一个。

解答

第 (i) 部分

由 $u_0 = \sin^2\theta$ 得 $1-u_0 = \cos^2\theta$，所以

$$u_1 = 4\sin^2\theta\cos^2\theta = (2\sin\theta\cos\theta)^2 = \sin^2 2\theta.$$

这与 u_0 的形式完全相同，只是把 θ 换成 2θ，因此同样的计算给出

$$u_2 = 4\sin^2 2\theta\ \cos^2 2\theta = \sin^2 4\theta.$$

角度每一步都加倍，所以我们猜想（conjecture）

$$u_n = \sin^2(2^n\theta) \qquad (n \geq 0).$$

用归纳法（*induction*）证明。当 $n=0$ 时，式子即 $u_0=\sin^2\theta$，成立。假设对某个 $k\geq 0$ 有 $u_k=\sin^2(2^k\theta)$。那么 $1-u_k=\cos^2(2^k\theta)$，而

$$\begin{aligned} u_{k+1} &= 4\sin^2(2^k\theta)\cos^2(2^k\theta) \\ &= \big(2\sin(2^k\theta)\cos(2^k\theta)\big)^2 \\ &= \sin^2(2^{k+1}\theta), \end{aligned}$$

这里用了 $\sin 2A = 2\sin A\cos A$，其中 $A=2^k\theta$。因此 k 的结果蕴涵 $k+1$ 的结果，由归纳法，对所有 $n\geq 0$ 都有 $u_n=\sin^2(2^n\theta)$。

第 (ii) 部分

设 $v_n=\alpha u_n+\beta$，其中 $\alpha\neq 0$（需要 $\alpha\neq 0$，才能由 v_n 还原 u_n）。代入 v_n 的递推关系：

$$\alpha u_{n+1}+\beta = -p(\alpha u_n+\beta)^2+q(\alpha u_n+\beta)+r.$$

展开后除以 α，

$$u_{n+1} = -p\alpha\, u_n^2 + (q-2p\beta)\,u_n + \frac{-p\beta^2+(q-1)\beta+r}{\alpha}.$$

我们希望这就是 $u_{n+1}=4u_n-4u_n^2$，所以比较系数。

- u_n^2：$p\alpha=4$，所以 $\alpha=\dfrac{4}{p}$（由于 $p\neq 0$，这没有问题，而且此时 $\alpha\neq 0$ 亦成立）。
- u_n：$q-2p\beta=4$，所以 $\beta=\dfrac{q-4}{2p}$。
- 常数项：$-p\beta^2+(q-1)\beta+r=0$。

前两条确定了 α 和 β；第三条于是成为 p、q、r 须满足的条件。代入 $\beta=(q-4)/(2p)$，再整条乘以 $4p$：

$$\begin{aligned} & 0 = -p\cdot\frac{(q-4)^2}{4p^2}+(q-1)\frac{q-4}{2p}+r \\ \iff\quad & 0 = -(q-4)^2+2(q-1)(q-4)+4pr \\ & \quad = (q-4)\big(-(q-4)+2(q-1)\big)+4pr \\ & \quad = (q-4)(q+2)+4pr \\ & \quad = q^2-2q-8+4pr. \end{aligned}$$

所以若 $4pr=8+2q-q^2$，则取 $\alpha=4/p$ 及 $\beta=(q-4)/(2p)$ 时三个系数全部吻合，而数列 $u_n=(v_n-\beta)/\alpha$ 满足 $(*)$，正如所求。

该特定数列。这里 $p=1$、$q=2$、$r=2$。条件成立：$4pr=8$，而 $8+2q-q^2=8+4-4=8$。我们得到

$$\alpha=4,\qquad \beta=\frac{2-4}{2}=-1,\qquad \text{所以}\qquad v_n=4u_n-1.$$

想一想 第 (i) 部分需要 $u_0 = \sin^2\theta$。这里能否找到合适的 θ?

由于 $v_0 = 1$，我们需要 $u_0 = (1+1)/4 = \frac{1}{2}$，而 $\frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4}$。所以 $\theta = \pi/4$ 可行，由第 (i) 部分得 $u_n = \sin^2(2^n\pi/4) = \sin^2(2^{n-2}\pi)$。因此

$$v_n = 4\sin^2\left(2^{n-2}\pi\right) - 1 = 1 - 2\cos\left(2^{n-1}\pi\right),$$

这里用了 $2\sin^2 A = 1 - \cos 2A$。逐项计算：

- $n = 0$：$v_0 = 4\sin^2\frac{\pi}{4} - 1 = 1$；
- $n = 1$：$v_1 = 4\sin^2\frac{\pi}{2} - 1 = 3$；
- $n \geq 2$：2^{n-2} 是整数，所以 $\sin(2^{n-2}\pi) = 0$，而 $v_n = -1$。

所以数列是

$$1,\ 3,\ -1,\ -1,\ -1,\ \ldots$$

即 $v_0 = 1$、$v_1 = 3$，而对所有 $n \geq 2$ 有 $v_n = -1$。

验算

直接迭代递推关系：$v_1 = -1+2+2 = 3$, $v_2 = -9+6+2 = -1$, 以及 $v_3 = -1-2+2 = -1$；由于 -1 映射到自身，数列此后一直停留在 -1，与公式相符。至于第 (i) 部分，试取 $\theta = \pi/6$：$u_0 = \frac{1}{4}$，$u_1 = 4\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{\pi}{3}$，以及 $u_2 = 4\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \sin^2\frac{2\pi}{3}$，与预测一致。公式 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$ 亦已用电脑就多个随机角度及首若干项验证过。

常见错误

- 写成 $u_n = \sin^2(2n\theta)$：角度每次加倍，所以增长方式是 2^n，而不是 $2n$。
- 忘记检查初始值 $u_0 = (v_0 - \beta)/\alpha$ 是否落在 $[0,1]$ 内，从而确实能写成 $\sin^2\theta$。
- 把常数项方程当作要解第三个未知数，而不是把它看成题目要你推导出的条件。

STEP 之外

递推关系 $u_{n+1} = 4u_n(1-u_n)$ 是取最极端参数时的逻辑斯谛映射（logistic map），是混沌（chaos）的标准例子：由于 $u_n = \sin^2(2^n\theta)$，把 θ/π 写成二进制（binary）便可看出，每一步只是把二进制数字移动一位，因此两个相近的初始值会以指数速度分开。第 (ii) 部分的代换是一种共轭（conjugacy），意思是两个动力系统（dynamical systems）在变换

坐标之后其实是同一个系统。Strogatz 的 *Nonlinear Dynamics and Chaos*（《非线性动力学与混沌》）是这些概念非常易读的入门书。

Beyond STEP 详细解答：https://beyondstep.keithmcnulty.org/zh-hans/。解答文字采用 CC0 1.0；题目本身版权属 Cambridge University Press & Assessment 所有（©），本文件不予转载。由机器从英文翻译而成；尚未经审阅。